G. E. BARIÈ

LA POSIZIONE GNOSEOLOGICA DELLA MATEMATICA

N° 312

PICCOLA BIBLIOT. DI SCIEN. MODERNE

F.LLI BOCCA

LA POSIZIONE GNOSEOLOGICA

DELLA

MATEMATICA

G. E. BARIÉ

LA POSIZIONE GNOSEOLOGICA
DELLA
MATEMATICA

TORINO (2)
FRATELLI BOCCA, EDITORI
Librai di S. M. il Re d'Italia

1925

« Sans les mathématiques, on ne penètre point au fond de la philosophie ; sans la philosophie, on ne penètre point au fond des mathématiques ; sans les deux on ne penètre au fond de rien ».

LEIBNIZ.

Capitolo I.

Preliminari metafisici.

§ 1. **L'astrazione.** — La posizione che la matematica è andata assumendo in quest'ultimo cinquantennio è degna del più attento esame per il filosofo. Forse non è questa l'ultima ragione per la quale fra i matematici odierni non troviamo una netta comprensione del come l' idealismo — o almeno una corrente di esso — può porsi il problema della matematica (1). Hanno essi matematici una specie di disposizione aprioristicamente contraria alla filosofia che porta come a naturale conseguenza o a grossolani errori d' interpretazione di non pochi pensieri fondamentali dei maestri della filosofia moderna, oppure, e ciò è peggio, ad una specie di affettazione di passare sotto silenzio o quasi le loro dottrine sull'argomento, che non serve certo a favorire quell'intima ripresa di rapporti cordiali cbe già esistevano fra la filosofia e le scienze particolari in genere e la matematica in ispecie (2).

---

(1) Cfr. *Appendice,* p. 175.

(2) Bene inteso s'intende qui la filosofia non naturalistica perchè con questa il contatto non fu mai perduto. In ogni modo filosofia naturalistica in senso stretto sarebbe oggi un non senso.

Noi non tratteremo qui di tali rapporti nè dal punto di vista logico nè da quello storico: il loro posto è altrove, in trattati introduttivi allo studio della filosofia e sopra tutto della teoria della conoscenza; ma tali rapporti sarà bene che il lettore ricordi onde più rapidamente e meglio entrare nell'essenza di quanto andremo svolgendo.

Principalmente dopo Kant (1) l'empirismo scientifico non avrebbe più dovuto rimproverare alla metafisica di essere un'arbitraria divagazione del nostro spirito, basandosi sul solito e tanto abusato luogo comune di essere ciò connaturato con la stessa sua intima ragione di essere in quanto la metafisica — lo dice la parola stessa — non può avere nello studio diretto ed esclusivo del mondo esterno la fonte di ogni sua conclusione. Kant ponendo da parte, o per lo meno credendo di poter porre da parte tutte le precedenti concezioni metafisiche (2) impostandone *ab ovo* il problema, dopo aver osservato come essa non sia progredita come le scienze particolari ed aver polemizzato sul suo carattere scientifico o non — in quanto il suo campo d'azione è oggi quello che era tremila anni fa — viene ad esaminare se,

(1) Mi si potrà obbiettare — e validamente — che proprio in causa dell'idealismo postkantiano, il divario fra filosofia e scienza ha il suo significato. Su questo siamo, in linea di massima e con le debite precauzioni, d'accordo. Per «dopo Kant» non intendo qui l'idealismo postkantiano, ma mi fermo alla filosofia dello stesso Kant, non sospetto, voglio sperare, di non tenere nella dovuta considerazione le scienze particolari.

(2) Sensibilissima invece rimase nello svolgimento del suo pensiero la metafisica leibniziana nel campo teoretico e il mondo platonico nella trascendenza morale sopra tutto nei riguardi dell'intelligenza divina.

eventualmente, la ragione di ciò debba cercarsi nella sua stessa natura di non avere una base sperimentale, base incondizionatamente attribuita allora alle scienze per l'influenza — è noto — di Locke e di Hume. Ma è vero questo? È vero che le scienze particolari hanno un'origine essenzialmente empirica? Vediamo un po', sembra ci dica Kant, esaminiamo la scienza tipica per eccellenza, quella che non può essere seriamente posta in dubbio da alcuno, la matematica.

È troppo noto l'ulteriore svolgimento del pensiero kantiano sull'argomento perchè la sua esposizione si renda qui necessaria: rimandiamo alla « Critica » e ai « Prolegomeni ». Possiamo però osservare che non è senza ragione che Kant abbia proprio scelto la matematica come prima prova, diremo, che non era il campo non sperimentale della metafisica che venisse ad infirmarne il carattere scientifico, perchè la stessa origine, lo stesso substrato non sperimentale poteva trovarsi anche nelle scienze considerate nella loro « pura » espressione. La matematica e per il suo carattere rigidamente scientifico di cui sopra si è fatto cenno, e per la sua stessa rappresentazione simbolica — numero e figura — meglio di ogni altra doveva presentarsi alla sua attenzione in quanto non solo relativamente all'origine poteva in essa trovare un carattere aprioristico, chè ciò è comune a tutte le scienze, ma altresì nel suo ulteriore svolgimento. L'insufficienza della speculazione metafisica attraverso i secoli — alludo alla « metafisica dogmatica » in senso kantiano — doveva quindi essere ricercata altrove, e precisamente nel compito impossibile che la metafisica si era fino a lui, Kant, proposto, cioè di pretendere di darci

la conoscenza assoluta della realtà noumenica e non limitarsi soltanto alla realtà fenomenica.

Onde non mi si fraintenda, vediamo di chiarire meglio il punto particolare del significato della matematica nella dottrina gnoseologica di Kant. Sappiamo tutti che tanto la matematica quanto la fisica non sono altro che due esempi portati da Kant con lo stesso intendimento, dimostrare cioè come qualunque processo conoscitivo possa essere determinato soltanto in virtù di un elemento « a priori » che è in noi, che preesiste al dato empirico e che viene anche a travisare, per la sua azione puramente formale, l'intima essenza di esso dato (l'oggetto): conseguenza ultima di tale travisamento, l'impossibilità di conoscere la cosa in sè. Ciò vale, è vero, incondizionatamente tanto per la matematica pura quanto per la fisica pura, ecc. Soltanto, mentre nel suo successivo svolgimento la fisica, come scienza della natura, non può basarsi soltanto su forme *intuitive* « a priori », ma deve ricorrere anche a *concetti intellettivi* « a priori », che determineranno la possibilità di quell' esperienza, dalla quale esclusivamente essa fisica dovrà poi attingere le sue scoperte, la matematica invece trae le sue scoperte dall' intuizione e le sviluppa in base al processo logico della deduzione. Solo in questo senso ho creduto di notare una differenza fra la matematica pura e la fisica pura in *senso kantiano* (1).

Lasciamo Kant e specifichiamo meglio i termini

(1) Questa è anche la spiegazione che si può addurre per avere Kant portato l'argomentazione dell' « a priori » nella fisica pura: ciò malgrado non reputo del tutto errate le critiche esposte a tale sua concezione (Cfr. questo volume, § 13, pag. 131 segg.).

nel loro preciso significato. Nell'allusione implicitamente fatta sopra al campo d'indagine essenzialmente *astratto* della metafisica, la parola astrazione non figura nel suo preciso significato: l'astrazione non è un « a priori ». L'astrazione è una rappresentazione simbolica di un concreto risultato ottenuto per cui ad esso se ne sostituisce un altro di carattere più generale: reciprocamente qualunque astrazione può avere infinite rappresentazioni concrete. Si vedrà meglio in seguito (1) il valore logico o non di tali generalizzazioni: c'importa ora di porre in luce come essa sia universalmente applicata nella più rigorosa delle scienze, la matematica.

La generalizzazione astratta non fu certo adottata senza contestazioni: è degna di nota la definizione data dal Russel (2) della matematica, secondo la quale essa sarebbe « la scienza in cui non sappiamo mai di cosa parliamo, nè se quello che diciamo è vero » (3). In tale paradosso vi è un

---

(1) Cfr. questo libro, Cap. II, §§ 6, 9.

(2) *Recent work on the principles of mathematics* (in *The International Monthly,* N. 1, pag. 84, 1901). È risaputo che il Russell si compiace del paradosso. Possiamo fra l'altro ricordare la sua definizione della negazione: « la negazione di una proposizione P significa che P implica tutto ». (Cfr. *The Principles of mathematics,* § 9, Cambridge, University Press, 1903), paradosso acutamente spiegato dal Couturat (*Principes .....*): « Cette definition paradoxale s'explique par le fait que le zero logique implique tout et que nier une proposition c'est l'égaler à zero ».

(3) Ampie considerazioni critiche riguardo a questa definizione del Russell troverai in Young, *I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria,* tr. it., Napoli, 1919, pag. 1, nota 3). In tali considerazioni si dovrà però tener conto soltanto degli argomenti strettamente matematici, non di quelli...

substrato profondo di verità che non potrà sfuggire allo studioso sereno e spregiudicato. Che cosa rappresentano infatti le astratte generalizzazioni dell'algebra? Qual'è il loro preciso significato? Nessuno. Possiamo anzi osservare come tali astrazioni acquistano un'importanza sempre maggiore quanto più le sostituzioni astratte perdono un significato proprio: nell'algebra si sostituisce la lettera al numero per togliere appunto al calcolo ogni caratteristica particolare: si sono scelte le lettere dell'alfabeto perchè sembra esse rappresentino dei simboli comodi e, diremo, inoffensivi (1).

---

filosofici. Così pure nella stessa opera a pag. 8 (nota 2). In tale nota anzi il commentatore suppone che da qualche filosofo la definizione stessa ha potuto essere presa alla lettera! Di ben diversa concretezza il commento del Couturat (*Principes...*): « En effet, on ne sait pas de quoi l'on parle, puisque la matière des implications est indéterminée; et l'on ne sait pas si ce qu'on dit est vrai, puisque la vérité des propositions dépend de la vérité des hypothèses, la quelle dépend à son tour du contenu qu'on leur donne » (*Revue de méthaphysique,* 1904, pag. 21-22).

(1) Una breve e succosa corsa storico-critica sull'affacciarsi alla mente del matematico della sostituzione algebrica troverai in P. Boutroux, *L'Idéal scientifique des mathématiciens,* pag. 84-92 (Paris, 1920). V. anche un articolo di E. Karpinski, *Origine et développement de l'algèbre* pubbl. in *Scientia,* Bologna, 1919, 8). Il lettore che desiderasse approfondire questo particolare argomento potrà consultare (cfr. nota di V. G. Mitchell in appendice al libro cit. di Young, tr. it.): Fazzari, *Breve storia della matematica* (Palermo, Sandron); Gambioli, *Breve sommario della storia delle matematiche* (Bologna, Zanichelli); Miller, *Historical Introduction to math. literature* (New York, Macruillen); Rouse Ball, *Breve compendio di storia delle matematiche* (Bologna, Zanichelli); Id., *Récréations mathématiques* (3me partie), Paris, Hermann et fils; Cantor, *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik* (1894); Fink, *A Brief History of Mathematics* (Chicago, 1903), dove figurano cenni

D'altra parte se nella generalizzazione sostitutrice della lettera al numero, noi possiamo spaziare in un campo ancora meno delimitato, ancora più simbolico di quello numerico, ciò non ostante non possiamo concludere che anche senza aver creduto di trovare — nell'algebra sopra tutto — una spiegazione all'espressione paradossale del Russel, questa avrebbe già trovato — indipendentemente dall'algebra — la sua ragione di essere nella stessa impossibilità di dirci che cosa intendiamo in geometria per punto, per linea, ecc., e in aritmetica dell'elemento primo di essa, del numero.

Sono difficoltà in ogni modo che tutti sanno e che tutti ammettono, primi gli stessi matematici: soltanto trattando delle definizioni date di questi primi elementi e delle critiche opposte, vi sarebbe da riempire diversi volumi; il tutto, bene inteso, senza nulla aggiungere al concetto della posizione della matematica nella teoria della conoscenza. L'accenno invece alla generalizzazione algebrica ci ha posto in luce come l'astrazione sia elemento di capitale importanza per passare dallo studio dei dati a quello dei concetti, considerando per concetto quell'elemento generico cui siamo arrivati dopo numerose, successive esperienze. Il concetto di una cosa noi lo possiamo avere attraverso una rappresentazione nelle sue linee essenziali della

---

generici. Per maggiore ampiezza di particolari cfr. invece: LORIA, *Le Scienze esatte nell'Antica Grecia*; GOW, *History of Greek Mathematics* (Cambridge, 1884); G. H. F. NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842); e particolarissima l'opera di HEATH, *Diophantos of Alexandrie* (Cambridge, 1885).

cosa stessa più volte percepita. Non sarà cioè un'immagine specifica di quella tal cosa o della tal'altra, ma unicamente di quelle qualità essenziali proprie degli oggetti di quella classe: noi avremo ad es. il concetto di albero non già ricordandoci un albero singolo effettivamente già percepito (1), ma soltanto un estratto delle qualità fondamentali dell'albero, una specie di risultato intermedio fra tutte quelle diverse specie di alberi che ci sarà stato dato di vedere in passato.

Questo e null'altro il *concetto* propriamente detto. Origine sperimentale? Senza dubbio; ma un'origine sperimentale che significa pur sempre un'elaborazione essenzialmente intellettiva del dato. Per non uscire da quel campo sperimentale particolarmente caro alle scienze positive, possiamo prendere a nostra testimonianza la scienza tipicamente empirica, la psicologia sperimentale. Essa ci premunisce contro eventuali obbiezioni al riguardo in quanto i risultati di essa ci permettono di poter affermare che — tanto per adoperare una espressione molto dotta in fisiologia, ma che non dice gran che ad un idealista — la «sede» dell'immagine è sicuramente nel cervello (2).

Il concetto è il primo passo del processo di astrazione, passo comunissimo come ognun vede e proprio della vita dell'uomo adulto in un'infinità di

(1) Tale rappresentazione specifica sarebbe propriamente la *immagine*.

(2) Gli studi recentissimi della neurofisiologia hanno attenuata, se non eliminata, la tendenza a fissare una localizzazione specifica ai centri nervosi. Degna di nota in Italia la scuola del Patrizi. (Vedi ad es. l'opera recentissimamente pubblicata di R. Brugia, *La irrealtà dei centri nervosi,* Bologna, 1923, L. Cappelli ed.).

manifestazioni dell'attività quotidiana. Ma l'astrazione non finisce qui: nella raffigurazione dianzi accennata della matematica, noi abbiamo un'espressione ben più complessa e profonda della nostra attività spirituale (1) che non nella semplice rappresentazione concettuale. Per meglio indicare questa ultima fase di evoluzione del processo astrattivo, non ci bastano i vocaboli fin qui adoperati: se prima abbiamo potuto in modo un po' grossolano è vero, ma sufficiente, cavarcela con l'espressione di « rappresentazione generica » attribuita al concetto, non così potremmo fare nell'astrazione algebrica. A vero dire — si è già osservato — saremmo già imbarazzati se dovessimo dire che cosa significa il numero se non stando molto sulle generali e considerarlo come una epressione simbolica indicante la quantità. Descartes stesso, pertanto non sospetto di temporaggiamenti e di tentativi di accomodamento per quanto riguarda la scienza (2), evita al possibile di adoperare la parola numero, sostituendovi bene spesso appunto la parola quantità.

Ma tale nostro imbarazzo diverrebbe addirittura perplessità se dovessimo ad esempio giustificare di fronte a un uomo ipotetico qualsiasi, atto a ricavare le proprie nozioni esclusivamente dalla esperienza, il processo sostitutivo dell'algebra.

---

(1) Non è e non potrebbe essere nostro compito approfondire qui il significato di questa attività spirituale, condizione *sine qua non* di qualunque idealismo e conquista imperitura di Kant l'aver posto in luce.

(2) Non si potrebbe estendere la stessa considerazione alle conclusioni ultime della sua metafisica, ad es. nei riguardi della dimostrazione dell'esistenza di Dio e, in generale, alla sua preoccupazione di non perdere il contatto con la religione ufficiale.

Essa ci si presenta « come una tecnica avente per oggetto il calcolo e che si lusinga di procurarci molteplici preziosi vantaggi » ci dice il Boutroux (1). Noi non neghiamo i vantaggi; anzi abbiamo accennato come siamo i primi a riconoscere l'importanza, la necessità anzi dell'astrazione onde progredire nel campo scientifico; non soltanto, come la tendenza all'astrazione sia una naturale disposizione del nostro spirito: ad essa non potremmo in ogni caso sottrarci anche se non ne riconoscessimo l'utilità, o per lo meno non potremmo, dopo un certo tempo, sottrarci almeno a quella forma naturale e quasi istintiva di astrazione che abbiamo chiamato concetto.

Alludendo a un individuo ipotetico atto a basare le proprie nozioni *esclusivamente* sull'esperienza ho voluto cioè alludere al sistema in molti casi dalla scienza adottato: usare la generalizzazione astratta e nello stesso tempo pretendere di considerare come divagazione cervellotica tutto quanto non ha esclusivamente sull'esperienza la sua base fondamentale ed esclusiva. Questo individuo ipotetico non comprenderebbe evidentemente nulla della frase del Boutroux; più ancora non potrebbe considerare che arbitrio qualunque generalizzazione astratta (2).

---

(1) Op. cit., pag. 82.

(2) In senso inverso da un essere essenzialmente logico la sostituzione stessa non può essere accettata da un punto di vista dimostrativo. (Cfr. questo lavoro, Cap. II, §§ 6, 9). La legittimità della sostituzione fu infatti ammessa con infinite precauzioni dai Greci.

§ 2. **La definizione e l'idea.** — L'astrazione è così posta in chiaro in modo che non possano più sorgere dubbi intorno alla sua interpretazione: compito questo — il chiaramente intendersi sul significato delle parole — non molto brillante, diremo, ma quanto mai utile onde stabilire una netta comprensione fra chi legge e chi scrive. Nel corso di questo studio ci sarà dato osservare come l'equivoco o, comunque, la non precisa esposizione del significato di una parola usata in preciso senso scientifico, possa portare a conseguenze spiacevoli.

Stabilito in tal modo il significato del processo astratto, ci sarà facile accorgerci che esso non figura soltanto nell'algebra. Per non uscire dalle matematiche, visto che di esse dobbiamo trattare, l'astrazione è propria della geometria come dell'aritmetica (1). Anche in geometria noi parliamo infatti indifferentemente di concetto di triangolo o d'altro senza aver piena conoscenza nemmeno dei primi elementi costitutivi di esso — non si dimentichi il paradosso di Russell — e prima di tutto del *punto*.

Girate la questione in tutti i sensi il punto è indefinibile, « n'est qu' une sorte de fiction » (2).

(1) D'altronde le relazioni fra algebra e geometria formano uno dei capitoli più interessanti degli studi matematici. Descartes svolge principalmente la sua algebra in un libro avente per titolo *Geometria* (Amsterdam, 1659, nell'edizione latina curata da Erasmo Bartholin).

Uno studio recente — d'altra parte essenzialmente tecnico e particolare — è quello dei proff. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni* (Bologna, 1915). Numerosi sono d'altronde i punti di vista nel considerare questa particolare questione che Descartes vide sopra tutto nell'applicazione dell'algebra alla geometria.

(2) J. RICHARD, *Sur la philosophie des mathématiques*, pag. 54 (Paris, 1903).

Tutti i geometri si sono sbizzarriti a cercarne una definizione che non fosse già di per se stessa una contraddizione in termini, dove l' inconcepibilità di qualche cosa d' inesteso e la necessità logica d'ipostasizzare la cosa stessa come inestesa, rendessero meno stridente il loro insanabile dissidio. Tutti giuochi di parole; sfoggi eruditi di virtuosità dialettiche. Essi non poterono ahimè, che ribattere la strada di Euclide e per eliminare il dissidio o per lo meno renderlo apparentemente meno aspro, stare molto, troppo sulle generali. Il maestro greco ci aveva già definito il punto come « ciò che non ha parti », ma la definizione è abile, non esauriente (1).

Oppure, seconda corrente, i geometri più modestamente e più onestamente, hanno rinunciato al compito impossibile e sono venuti nella determinazione che alcuni concetti che noi indifferentemente adoperiamo nella geometria sono simboli di entità non esistenti. Siano questi il punto, la retta, il piano (Hilbert) (2) o sia che questi si possano ridurre al punto e alla « sovrapposizione » (Padoa), a noi importa solo constatare come, non soltanto in geometria, si sia sentita la necessità di ricorrere a un processo astratto per meglio comprendersi e per poter proseguire; ma si è sentita la necessità d'ipostasizzare come esistenti — tanto per adoperare una parola positiva — delle entità esclusivamente create dal nostro pensiero.

Ci affacciamo così alle soglie di un altro pro-

---

(1) Cfr. sull'argomento: G. VERONESE, *Fondamenti di geometria*, I, 209-210 (Padova, 1891); VECCHIETTI, *L'Infinito*, pag. 28.

(2) *Grundlagen der Geometrie*, 3ª ed., Lipsia, 1909.

blema; non più cioè l'astrazione, espressione ultima di un processo intellettivo che parte da un risultato positivo per arrivare ad una rappresentazione concettuale, ma di qualche cosa che preesiste ad ogni risultato positivo. Ci basti per ora questa semplice osservazione: là riprenderemo fra poco: ho voluto però fare subito l'osservazione stessa perchè essa è di capitale importanza per tutto lo svolgimento di questo studio.

Ciò detto, continuiamo nella nostra esposizione. Il Richard (1) si affretta a rassicurare in certo qual modo tutti coloro (op. cit., pag. 54) che potessero obbiettare che se « al posto di un corpo piccolissimo noi mettiamo un punto, al posto di un corpo sottile e lungo una linea, al posto di un corpo infinitamente piatto una superficie » noi non avremmo più allora dei risulati « conformi alla realtà sensibile », si affretta a rassicurarli, dicevamo, che tale divario può essere reso « straordinariamente debole ». L'assicurazione non può presentare per il filosofo il benchè minimo interesse. Indebolito quanto si vuole il divario stesso resterà pur sempre incolmabile e se l' indebolimento del medesimo può rendere soddisfatto il matematico o il fisico, presenterà sempre lo *stesso* ostacolo per il filosofo. Non solo; ma per l'idealista la questione si presenta sotto un aspetto opposto a quello sotto il quale lo considera il Richard: ben

(1) Da un punto di vista essenzialmente matematico cfr. al riguardo: M. PASCH, *Vorlesungen ueber neure Geometrie* (Leipzig, 1882), nonchè secondo lo stesso indirizzo: PEANO, *I principii di geometria logicamente esposti* (Torino, 1889). Indipendentemente da tale indirizzo e limitatamente all'essenza della definizione cfr. anche: GERGONNE, *Essai sur la théorie des définitions* (in *Annales des mathématiques*, IX, pag. 1 segg.).

lungi dal rassicurare a favore di un risultato conforme alla realtà sensibile, sarà tale divario per il filosofo idealista una nuova conferma — senza grande bisogno di essa d'altra parte — che la sensibilità nostra solo in parte ci può sorreggere nell'affermazione prima e nel successivo sviluppo di qualunque scienza.

Importa molto invece a noi il constatare che siamo così tenuti implicitamente ad ammettere la necessità di entità non soltanto non sensibili, ma altresì che prescindano da ogni sensibilità: ciò per lo meno nei riguardi di quella scienza che stiamo studiando: la matematica. Di queste ipostasizzazioni alcune sono — quelle citate — indefinite ed indefinibili: altre sono, in matematica, definite. Entra in campo ciò che ci sembra tanto semplice e comune e che invece da millenni agita e sconvolge il pensiero: la *definizione*.

Abbiamo veduto come l'algebra sia l'espressione tipica dell'astrazione; ma l'algebra può agire con tanta sicurezza e tranquillità esclusivamente se potrà appoggiarsi su regole e principii generali che alla loro volta trovano la loro giustificazione nelle definizioni. Lo stesso concetto di definizione contiene in se medesimo la conferma dell'impossibilità di tutto definire: per due o tre entità almeno si dovrà ammettere, onde non compiere un giro vizioso di parole, l'impossibilità di dirci che cosa sono. Abbiamo accennato quali possono essere quegli elementi primi, che, per essere necessarii in qualunque definizione vengono forzatamente a precedere anche le più semplici di esse. Sono *idee* che preesistono al fatto, come fu notato dagli stessi matematici (Camescasse) (1) e sarebbe

(1) Cfr. Young, op. cit., pag. 6 (nota).

perciò del tutto assurdo cercare di ricavarle da un fatto. « Ce qu'on ne peut définir, on le montre » ci dice il Richard, ma non sempre naturalmente si può in tal modo semplicistico risolvere la questione (1) ed anche ove lo potessimo, si ricadrebbe pur sempre in quell'appello alla nostra conoscenza sensibile, che già abbiamo veduto essere insufficiente a tutto rivelarci.

Nello stesso tempo, genericamente considerata — ossia indipendentemente dall'ipotesi del matematico — la definizione non significa gran che per chi si affacci ad una tale determinata scienza: essa può esprimere il vero concetto di una scienza soltanto per l'intelligenza di chi tale scienza conosca già. In altre parole la definizione è una proposizione che avrebbe il suo posto più alla fine dello studio intrapreso che non al principio.

Questo per quanto riguarda il concetto appunto « generico » di definizione; ma essa assume un aspetto tutto particolare nella matematica. Qui si manifesta la *necessità* che la definizione preceda lo svolgimento: questo precedere non è cioè come nelle altre discipline semplice effetto di un'abitudine metodologica di esposizione, di una tradizione più o meno giusta: ma ciò diventa indispensabile in quanto tutte le intuizioni e le deduzioni dei matematici hanno ragione di essere solo se riconosciamo ed accettiamo le definizioni preliminari.

---

(1) Acute osservazioni — da un punto di vista puramente matematico — sulla « definizione » troverai in ENRIQUES, *Problemi della Scienza* (critica della definizione), Bologna, Zanichelli, 1906. Cfr. pure un articolo di Gergonne pubblicato negli *Annales des mathématiques,* IX, 1, avente per titolo: « Essai sur la théorie des définitions ».

Il passaggio dall'astrazione alla definizione (in senso matematico) ha posto in luce un elemento non soltanto non essenzialmente empirico — chè tali già più non sono, come si è veduto, il concetto e l'astrazione algebrica, ecc. — cioè un'espressione che risulta in certo qual modo da una fusione di esperienza e di sintesi intellettiva; ma anche di elementi *esclusivamente* determinati dal pensiero, indipendentemente da qualsiasi esperienza. Tali elementi ci danno l'idea di « a priori »: essi sono appunto, in matematica, le definizioni, i postulati e gli assiomi (1).

Ricapitolando brevissimamente: l'esperienza semplice non ci dà che il dato (2); una fusione sintetica di esperienza e di attività intellettiva ci dà l'astrazione, dalla sua forma primitiva e semplice del concetto fino alla sua manifestazione più evoluta della rappresentazione algebrica. Ma perchè tali processi siano logicamente possibili è necessario che noi ammettiamo degli altri elementi che sono — tanto per intenderci — l'*opposto* del dato: mentre questo è puramente empirico, questi nuovi elementi sono puramente intellettivi: tali elementi chiameremo *idee*.

Da questa esposizione risulta che l'astrazione è

(1) Distingueremo in seguito gli *assiomi* dagli altri principii a priori, mostrando come essi siano proprii di qualunque nostra attività spirituale, mentre i postulati riguardano soltanto le matematiche (cfr. questo lavoro, cap. III, § 12).

(2) Onde non mi si fraintenda, non credo dire con questo che possiamo ammettere qualche cosa — semplice quanto si vuole — che non richieda per essere conosciuta la nostra attività intellettiva sintetizzatrice; ma, mentre il dato viene ad essere conosciuto dalla nostra sensibilità, l'elaborazione concettuale di esso è *diretto* effetto della nostra intelligenza.

un processo intermedio fra il dato empirico e l'idea: questa, come elemento che preesiste a qualunque esperienza sensibile, non potrà essere che elemento formale (1). In tale mondo formale potremo riscontrare due gradi: un primo grado, più semplice in quanto più vicino allo stato attuale della nostra coscienza, il quale, pure preesistendo ad ogni empirismo, tuttavia informa tutta la nostra conoscenza sensibile, e sarà la forma intuizionistica « a priori ». Un secondo grado infine che ci sarà dato dal pensiero razionale puro: sarà questo il mondo essenzialmente logico della conoscenza assoluta, esclusivamente inquadrato dalle categorie di contraddizione e d'identità (2).

L'attribuire un campo puramente ideale a questo secondo, ultimo grado di attività formale del pensiero, non esclude naturalmente che esso secondo grado possa essere vantaggiosamente adottato anche nel campo della conoscenza sensibile. Non soltanto; ma tutte le proposizioni scientifiche aspirano ad essere controllate da esso. Tale controllo formale chiameremo il controllo *logico* (in senso rigoroso). Mentre la forma intuizionistica riguarda tutte le nostre conoscenze, quella *puramente* logica non

(1) Non si dimentichi il § 9 dei *Prolegomeni* di Kant, in risposta alla specifica domanda formulata nel paragrafo precedente: « Ma come può l'intuizione dell'oggetto antecedere l'oggetto? ».

(2) Altre due categorie si potrebbero ammettere senza uscire dal complesso logico di tali distinzioni e cioè l'*incompatibilità* e la *causalità*; ma si può fare rientrare la prima nella categoria più generica della contraddizione, e risolvendo il principio di causalità si arriva all'identità. Lo svolgimento di tali categorie è compito esclusivo della metafisica e non riguarda questo studio. Ci basti accennare che è quel procedimento per il quale si arriva all'identità fra causa ed effetto.

riguarda che una parte minima di esse, soltanto cioè quelle che possiamo considerare come incondizionatamente vere, che prescindono totalmente anche dalle forme intuizionistico-sensibili di tempo e di spazio e saranno gli assiomi (non i postulati e non le definizioni) (1) e le proposizioni direttamente derivati esclusivamente da tali assiomi.

§ 3. **L'intuizione pura.** — Non credo di aver dato con questo il preciso significato d'intuizione e d'idea. Mentre le sopra esposte considerazioni intorno all'essenza del concetto e dell'astrazione non offrono punti per i quali non possano essere da tutti accettate, il significato adottato d'intuizione « a priori » e d'idea presenta senza dubbio il fianco a critiche e rimproveri.

In primo luogo non tutti accetteranno di buon grado la distinzione implicita in conoscenza sensibile e conoscenza razionale. In secondo luogo, anche accettando la distinzione stessa, è passibile di discussione il significato delle parole. Alla prima eventuale obbiezione non ho nulla da rispondere: tale distinzione gnoseologico-metafisica è qui presupposta ed ammessa come nota. Se essa dovesse qui svolgersi cambierebbe totalmente il carattere del nostro studio che avrebbe dovuto allora chiamarsi « introduzione all'idealismo » o in altro modo similare e non avere lo scopo particolare dello studio della posizione della matematica nella teoria della conoscenza.

Alla seconda di tali eventuali obbiezioni rispondo con il dichiarare che il significato delle parole intuizione a priori e idea è qui soltanto « adottato »;

---

(1) V. nota 1 pag. 22.

ha cioè una funzione semplificativa che farà sì che ci si intenda più speditamente. Faccio in ogni modo osservare che quell'intuizione a priori, che, in quanto essa pure formale, abbiamo posto nel mondo delle idee, non deve confondersi con l'intuizione in genere, di natura prevalentemente ipotetica, la quale parte da un risultato positivo cercando di stabilire fra questo una specie di correlazione con altri risultati che l'inspirazione può suggerire come eventualmente conseguibili, partendo da quello. L'intuizione sotto tale aspetto considerata sarà da me trattata nei paragrafi 6, 7 e 8 di questo saggio. Neppure questa intuizione però — possiamo dirlo fin d'ora — è di natura sensibile. Ma, mentre l'intuizione cui si è accennato è essenzialmente ideale e perciò preesiste a qualunque dato positivo, questo secondo aspetto dell'intuizione ci ricorda piuttosto la divinazione di una verità ignota suggeritaci da una verità nota. La prima è l'intuizione ideale di Platone, l'a priori di Kant e così via. I matematici non s'impressionino. Anche nei pensatori loro cari tale forma d'intuizione figura: è quella di Descartes nella sua « V meditazione » (1), come fra i moderni la troviamo affermata esplicitamente e non, in Carlo Hermite.

La seconda specie d'intuizione è ad es. quella di Newton. Si procede in essa in questo modo: la conoscenza cui siamo arrivati mi pare mi autorizzi a passare a questo e a quest'altro; lo posso io fare? Proviamo. È il « Cimento » del '600, molto meno *sperimentale* di quello che molti pretendano: è desso il procedimento intuizionistico del genio nelle scienze positive.

---

(1) Pag. 108 segg. dell'ed. Flammarion.

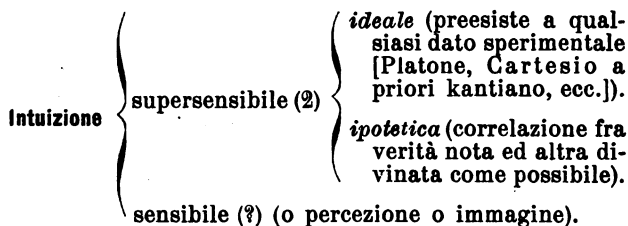
Per l'importanza che l'ipotesi viene ad assumere in tale processo del pensiero, chiameremo tale intuizione *ipotetica.*

Molti vorrebbero ammettere un'altra specie d'intuizione, la sensibile. Anzi, normalmente l'intuizione viene distinta in supersensibile e sensibile, senza alcun'altra suddistinzione: per conto mio ritengo sia indispensabile quella sopra esposta in ideale propriamente detta ed ipotetica. Non vedo invece la necessità dell'intuizione sensibile che sarebbe per noi una terza specie d'intuizione: il rispetto che porto ad alcuni degli assertori della sua importanza (non fosse altro, per Kant!) non mi permette di porla senz'altro in disparte: essa mi sembra però priva di un significato suo proprio in quanto o potrà confondersi con la percezione o non essere altro che un momento del processo psicologico della riviviscenza di essa percezione sotto forma rappresentativa e in tal caso non presenterà differenze sostanziali con l'immagine. Inoltre sotto questo secondo aspetto esaminata l'*intuizione sensibile* oltre al non essere più intuizione, non sarà più nemmeno sensibile, come già si è incidentalmente osservato (pag. 14). In ogni modo avremo su ciò a ritornare fra poco sul significato appunto di tali parole nel Mach.

Certo l'intuizione sensibile non figura nelle scienze matematiche: la vera e propria specie dell'intuizione della matematica è quella da noi chiamata ipotetica. Quella più specificatamente « ideale » figura nella matematica come in qualsiasi altra scienza: essa ne è il presupposto. Quella ipotetica invece è necessaria non già per darci gli elementi fondamentali, originari del sapere, ma per poter proseguire. È in matematica la condi-

zione sine qua non per passare da una verità nota ad una verità non ancora nota. Anche in fisica, mi si obietterà, avviene lo stesso: noi stessi abbiamo considerato in tal modo l'intuizione ipotetica e si è portato l'esempio di Newton. Perfettamente, ma, mentre in fisica l'intuizione ipotetica è divinazione di genio, in matematica è normalità. Non voglio qui alludere ad alcuna graduatoria nei valori delle singole scienze: in filosofia ad es. essa non ha che importanza relativa: ha un compito ausiliario (1).

Per meglio fissare le idee, visto che siamo in matematica, permettiamoci anche noi il lusso di una rappresentazione abbreviata dei risultati ottenuti:

Intuizione
- supersensibile (2)
  - *ideale* (preesiste a qualsiasi dato sperimentale [Platone, Cartesio a priori kantiano, ecc.]).
  - *ipotetica* (correlazione fra verità nota ed altra divinata come possibile).
- sensibile (?) (o percezione o immagine).

Così delineati, molto per sommi capi — sono il primo a riconoscerlo — i punti essenziali della nostra possibilità di conoscere, quale posto dobbiamo, nel problema gnoseologico, fissare alla matematica? È questo appunto lo scopo del nostro studio. Uno storico avrebbe naturalmente in modo ben diverso impostata la questione: anche senza attenersi ad un'esposizione del concetto della

(1) Cfr. questo lavoro, cap. II, §§ 6, 8.

(2) Nel senso di non empirico: non per questo cioè deve significare pensiero puro, ragione.

matematica nelle diverse civiltà, avrebbe per lo meno posto in luce le diverse interpretazioni che della matematica si sono avute e si hanno dagli studiosi della materia (1). Sia essa matematica quasi un metodo formale atto a plasmare le successive indagini della fisica e in genere delle scienze positive (2); sia la matematica paragonabile, in omaggio all'estetismo greco (3), ad una

(1) Interessanti sotto questo secondo aspetto le osservazioni storico-critiche del Boutroux (op. cit., pag. 247 segg.).

(2) Cfr. specificatamente BOUASSE, *De la Méthode dans les Sciences,* pag. 76 segg. (Paris, 1909).

(3) Il Boutroux (op. cit., pag. 45 segg.) nota differenze essenziali fra la concezione estetica che della matematica si erano fatta i Greci con la concezione estetica dell'indirizzo moderno. Questa si riconnette alla soddisfazione tutta propria del « costruttore » di nuove teorie o del carattere elegante di nuove dimostrazioni: « Voila, dit-on souvent, un « beau travail mathématique », indiquant par là qu'autant ou plus que la valeur intrinsèque des questions étudiées on entend louer l'ingéniosité et la brillante victoire de l'Auteur ». Per i Greci invece la bellezza è da ricercarsi nell'idea prima « et non dans ce que l'homme ajoute aux idées », in altre parole le costruzioni delle figure, le dimostrazioni dei teoremi e così via.

La distinzione è profonda e sottile; ma di essa noi non possiamo tener conto nella semplice allusione sopra fatta che ha precisamente lo scopo di porre in luce che, qualunque possano essere le particolari interpretazioni della matematica, tutte queste interpretazioni hanno per il filosofo un'importanza soltanto generica.

Il lettore potrà consultare: P. TANNERY, *La géométrie grecque* e l'articolo pubblicato sulla *Revue de méthaphysique et de morale* (marzo 1913) dal RIVAUD; L. BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique* (Paris, 1912); G. MILHAUD, *Leçons sur les origines de la science grecque* (Paris, 1893); ID., *Les philosophes géomètre de la Grèce* (Paris, Alcan, 1900); ID., *Etudes sur la pensée scientifique chez les Grecs et chez les modernes* (Paris, Alcan, 1906); ID., *Nouvelles Etudes sur l'histoire de la pensée scientifique* (Paris, Alcan, 1911).

imperitura opera d'arte; sia infine essa una scienza con un diretto scopo di ricerca come qualsiasi altra, tutti questi ed altri punti di vista possono essere accettati dal filosofo.

Indubbiamente in ciascuno di essi vi sono molti lati pienamente accettabili; inoltre i punti di vista medesimi per quanto fra loro differenti non soltanto come punto di partenza, ma anche come campo d'azione, non sono fra loro affatto incompatibili. Essi rappresentano indubbiamente un interesse maggiore per uno storico delle matematiche o per un matematico che per un filosofo cui in ultima analisi mediocremente importa sapere che nel secolo tale si sia seguito prevalentemente questo o quell'indirizzo. Il filosofo esplica nei riguardi delle scienze in sommo grado quell'attività sintetica che gli scienziati alla loro volta esplicano consciamente — anche se non sempre vogliono riconoscerlo — nel loro campo particolare, come il volgare inconsciamente nella sua attività quotidiana. Sintesi in questo caso significa proprio fare un estratto di tutte queste diverse interpretazioni — fra loro incompatibili, ripeto — e svolgere tranquillamente la propria teoria: in questa il matematico interessato potrà eventualmente trovare questo o quel lato favorevole o contrario alla sua interpretazione e, se lo crederà opportuno, tenerne conto. Nello stesso modo il filosofo deve tenere conto dello svolgimento dell'indagine matematica *presa nel suo complesso*: qualunque specializzazione in filosofia può essere dannosa.

Ogni esame critico non può vertere che sugli elementi essenziali di una disciplina. Già Descartes nel proporsi di combattere tutti i pregiudizi che

sono radicati in noi ed ostacolano il nostro progresso nella conoscenza, riteneva non doversi perciò ritenere necessario passare alla disamina di ciascuno di tali pregiudizi od opinioni comuni, operazione fra l'altro che sarebbe andata all'infinito, « ma, poichè la rovina delle fondamenta trascina necessariamente con sè tutto il resto dell'edificio, io prenderò innanzi tutto in esame quei principii sui quali poggiavano tutte le mie antiche opinioni » (1).

Da quanto si è detto fino ad ora si comprenderà facilmente che in una teoria della conoscenza, com'è qui intesa, il punto essenziale è quello di stabilire i rapporti fra le proposizioni matematiche — e prevalentemente geometriche sulle quali pare maggiormente verta, oggi sopra tutto, l'attenzione degli scienziati — e quelle verità assolute, incondizionatamente vere, cui aspira non soltanto ogni forma d'idealismo, ma senza confessarselo, forse senza saperlo, lo stesso buon senso dell'uomo comune che inconsciamente chiede di essere sicuro su quanto afferma o nega.

§ 4. **L'ipotesi nelle scienze.** — Mentre le scienze particolari rimproverano alla filosofia la sua eccessiva astrazione, noi possiamo quindi a buon diritto osservare come esse stesse, anche le più positive, non possano fare a meno di ricorrere all'astrazione medesima quando vogliano arrivare alla formulazione di leggi aventi carattere rigidamente scientifico. Lo stesso procedimento conoscitivo prevalentemente seguito dalle scienze positive (l'induttivo) porta alla considerazione generale

(1) *Méditations méthaphysiques* (1er).

di quel fenomeno particolare che lo studioso aveva dapprima isolatamente esaminato.

In queste parole è già implicito il concetto di *astrazione*: per esso possiamo intendere qualunque processo intellettivo per il quale il pensiero dopo aver osservato sperimentalmente il verificarsi e il costante ripetersi dei momenti della ininterrotta successione causale (momenti pertanto razionalmente non distinguibili, ma ciò ora non importa) fissa tali sue osservazioni in un principio o in una legge, che gli permetterà, eventualmente, di passare per analogia all'ipostasizzazione di altra legge o principio, di cui avrà invece a cercare la conferma sperimentale: questa sarà più propriamente l'ipotesi intuitiva o intuizione ipotetica, come si è veduto. Di questa soltanto s'intenderà parlare in questo studio, quando non verrà espressamente indicato trattarsi dell'altra specie d'intuizione: l'ideale.

Tale processo ci permetterà di lavorare sul dato senza avere il bisogno di ripetere ogni volta la stessa indagine in quanto appunto potremo prescindere dall'esame dei particolari di questo o quel fenomeno singolo: è quanto abbiamo veduto più nettamente e più universalmente applicato nel calcolo algebrico. L'algebra, sostituendo la lettera al numero, compie precisamente il processo tipico dell'astrazione significando che le sue verità che abbiamo sperimentato sul numero tale o tal'altro possono estendersi a tutti i numeri, a tutte le quantità.

Ben lungi quindi da semplice divagazione arbitraria che ci allontana dalla constatazione sperimentale, possiamo considerare il processo intellettivo come di estrema efficacia anche nella fisica,

non già soltanto come semplice astrazione, per la quale prescindendo dalle qualità particolari di un determinato fenomeno singolo, noi cerchiamo di elevarci alla sua espressione generica, perchè il suo valore come tale — esempio l'algebra — può, dopo quanto si è detto considerarsí come fuori discussione; ma anche di vero e proprio ispiratore e determinatore di nuove scoperte, il che forma precisamente quel secondo carattere cui abbiamo accennato e che abbiamo chiamato intuizione ipotetica. Cercherò di spiegarmi più chiaramente (1): le scienze fisiche non possono nell'enunciazione di qualsiasi loro principio fare a meno di basarsi su verità matematiche come quelle che, rimanendo inalterati i presupposti temporali e spaziali su cui poggiano, non possono seriamente essere posti in dubbio da alcuno: è per tale sicurezza che Kant ha creduto di poter arrivare a stabilire — contro Hume — il valore universale e necessario delle

(1) Interessanti, da un punto di vista puramente positivo, le dottrine sui rapporti fra matematica e fisica in particolare e con le altre scienze in generale. Si potrà consultare con profitto: P. Duhem, *La théorie physique, son objet et sa structure* (Paris, Chevelier et Rivière, 1909); Bouasse, *De la méthode dans les sciences* (Paris, Alcan, 1909) (già citato, pag. 28); Arrighi, *La storia della matematica in relazione con lo sviluppo del pensiero* (Torino, Paravia); G. Milhaud, *Etudes sur la pensée scientifique*; A. Pastore, *Sopra la teoria della scienza. — Logica, matematica e fisica* (Torino, Bocca); E. Picard, *La science moderne*; E. Bouty, *La vérité scientifique*; A. Rey, *La théorie de la physique*; R. Brunschvicg, *La relation entre le mathématique et le physique* (adresse lue au *meeting* des Sociétés philosophiques d'Angleterre et d'Ecosse, Durham, le 14 juillet 1923), pubblicato poi in *Revue de métaphysique,* 1923, pag. 323 segg.; Capelli, *La matematica nella sintesi delle scienze* (Discorso inaugurale tenuto alla R. Università di Napoli, 1881).

verità matematiche. Quando le scienze fisiche non possono appoggiare le loro affermazioni su verità matematiche, noi possiamo a buon diritto considerarle come del tutto insufficienti per la formulazione coerente della legge scientifica e attribuire loro un valore semplicemente empirico. Hume ha già parlato troppo chiaramente sul nessun valore logico di proposizioni basate esclusivamente sull'esperienza per doverci tornare sopra: la debolezza della sua dottrina dipende piuttosto dall'aver troppo generalizzato tale affermazione, estendendola anche a quelle nozioni che si basano su principii non ricavati dall'esperienza. « Davide Hume — dice Kant (1) — riconobbe che, per avere il diritto di andare al di là dell'esperienza, bisognava accordare a questi concetti (2) un'origine a priori. Ma egli non potè spiegarsi in qual modo sia possibile che l'intelligenza concepisca come necessariamente collegati nell'oggetto concetti che non lo sono affatto tra di essi nell'intelletto e non gli venne fatto di pensare che forse l'intelletto era per mezzo di questi stessi concetti l'artefice che gli fornì gli oggetti medesimi ».

Questo è precisamente il primo punto di vista che abbiamo sopra considerato come evidente, cioè il controllo logico della generalizzazione astratta.

---

(1) *Critica ragione pura* (tr. fr.), § 14, pag. 134-135.

(2) Ossia i « concetti puri dell'intelletto », che noi abbiamo chiamato specificatamente idee. Non vi è incompatibilità in ogni modo anche mantenendo il termine un concetto, che Kant d'altra parte confonde spesso con quello d'idea; si è infatti accennato che il mondo delle idee informa nel suo primo grado — l'intuizionistico — tutta la conoscenza sensibile, non fosse altro attraverso le più universali manifestazioni di essa: il tempo e lo spazio.

Ma possiamo andare oltre e osservare come il processo inverso può in molti casi aver luogo, e con pieno valore logico e non di semplice conoscenza empirica, quando, formulata astrattamente un' ipotesi, noi, per vincere ogni dubbio eventuale, ne cerchiamo sperimentalmente la conferma. Ove la conferma sperimentale abbia luogo ecco l' idea originaria aver determinato una nuova scoperta. È questo anzi il procedimento più normale dell' intuizione geniale; l'armonia perfetta del subbiettivo e dell'obbiettivo che troppo unilateralmente lo Schelling aveva creduto di trovare nell' incondizionata prevalenza dell'elemento soggettivo della serie ideale sull' obbiettivismo della serie reale. È il processo di Newton (1) nella scoperta delle leggi del movimento; di Galileo nella legge della caduta dei gravi, anche se posteriore e più complessa sia stata la determinazione dell' « uniformemente accelerato » della legge stessa; di Franklin nel divinare l'analogia di natura della scintilla elettrica con il fulmine.

Quando Francesco Bacone cominciò a esprimere concettualmente l'esperienza non più limitandola alla semplice osservazione del caso singolo per cui ne venne a questa maggiore importanza nel campo del sapere, il procedimento ipotetico fu a torto dagli immediati successori trascurato come arbitrario nelle scienze particolari e ciò a scapito non lieve di queste sopra tutto dal punto di vista della celerità dei risultati, senza per questo nulla aggiungere alla loro sicurezza. Leibniz osserva come le grandi menti penetranti di Descartes e di Spinoza si fossero subito accorte della lentezza

(1) Cfr. pag. 25.

e degli inciampi che tale metodo puramente sperimentale spinto alle sue ultime conseguenze poteva portare e come ciò Descartes e Spinoza avessero espresso nettamente riguardo al fisico Boyle. Descartes in una delle sue lettere a proposito del metodo di Francesco Bacone; lo Spinoza, che il Leibniz bene inteso cita con le dovute riserve (1), in una lettera a Oldenbourg, segretario della « Società Reale d'Inghilterra ». In tale lettera egli osserva appunto come il Boyle s'arresti più del bisogno su numerose e belle esperienze senza indurne altra conclusione « di quella ch' egli avrebbe potuto prendere come principio, ossia che tutto si fa meccanicamente nella natura, principio che la sola ragione può darci come sicuro e non mai le esperienze, qualunque sia il loro numero ».

§ 5. **L'ipotesi nella filosofia.** — Certo, in tali considerazioni sull'importanza dell'ipotesi nella conoscenza, la logica in senso stretto non ha nulla a che vedere. Tali ipotesi non possono infatti farsi rientrare nè nel metodo deduttivo nè nell'induttivo: se l'ipotesi in un certo senso, e nel campo fisico specialmente, può trovarsi più vicina all'induzione che alla deduzione — in quanto

(1) È noto come lo Spinoza sia stato perseguitato e respinto in vita e disprezzato per molti anni dopo la sua morte non già soltanto dalla massa incolta e superstiziosa e dagli antichi correligionari, ma anche da pensatori illuminati — basterebbe ricordare la violenza di Malebranche contro « l'ateo ebreo » — non esclusi coloro che non poco attinsero alla sua dottrina. Il Leibniz in tal punto (*Nouveaux Essais,* IV, cap. XII) crede indubbiamente di compiere un atto di franchezza coraggiosa, scrivendo: « ...et Spinoza, que je ne fais point de difficultés de citer quand il dit de bonnes choses... ».

rispecchia normalmente un processo che va dal particolare al generale — non per questo incorreremo nell'errore di alcuni di non aver saputo sufficientemente disgiungere la rigorosità logica dell'induzione dall'analogia intuizionale dell'ipotesi (1). Tale procedimento analogico è, sotto un certo aspetto, ben superiore al rigido ragionamento (2): esso è la diretta conseguenza di quell'eccezionale « sviluppo delle associazioni per similarità » che è acutamente considerato dal James (3) come la caratteristica precipua del genio.

Anzi nel campo strettamente filosofico l'ipotesi astratta del punto di partenza è propria particolarmente nei deduttivi per eccellenza. La citazione di Descartes e Spinoza nelle considerazioni riportate del Leibniz, non fu qui fatta a caso: essi cercano nella realtà la conferma della loro ipotesi.

Il famoso dubbio cartesiano non è che il punto di partenza di quello che si potrebbe chiamare la seconda fase del suo pensiero (bene inteso non in senso cronologico); la fase più propriamente riflessa, non già della visione complessiva della realtà, la quale deve necessariamente essergli balenata in precedenza sotto forma appunto di semplice ipotesi, d'intuizione geniale. Ha tale mia

(1) Il lettore potrà consultare i due lavori del Whewell: *The Philosophy of scientific Ideas* (London, 1840) e *History of scientific Ideas* (London, 1858). Sono essi studi più di carattere storico-scientifico che propriamente filosofico, malgrado l'inquadramento sia generale e non riguardi particolarmente questa o quella scienza. Filosoficamente il Whewell risente alquanto dell'influenza kantiana, malgrado abbia troppo accentuato l'opposizione dell'*idea* al *fatto*.

(2) Cfr. specificatamente sull'argomento: R. Benzoni, *L'Induzione*, I, pag. 93 segg. (Genova, 1894).

(3) W. James, *Psicologia* (tr. it)., Cap. XI, XII.

opinione valore maggiore di semplice supposizione arbitraria? Certo nessuno, forse nemmeno chi crea, può seguire l'evoluzione del proprio pensiero, evoluzione che sarebbe della più grande utilità conoscere per la scienza e che non ci è che molto raramente, e quasi mai con decisa sincerità, rivelata dai battitori di nuove strade; ma certo a tale convinzione si può (non dico *si deve*) arrivare nell'ambito della filosofia pura, ove si rifletta che il fatto, come si è veduto, avrebbe riscontro in quelle scienze che, per essere il loro campo d'azione più ristretto e per trattare una materia molto più accessibile, in quanto può rigorosamente essere controllata dall'esperienza, sono più organiche, più concretamente delimitate e costituite che non la filosofia idealistica. Inoltre a tale convinzione fui portato dalla constatazione che Descartes, senza una precedente intuizione geniale del complesso, formulato il suo « cogito ergo sum », non avrebbe potuto, in modo rigorosamente logico, andare oltre.

Al « cogito » cartesiano possiamo infatti dare, se ben guardiamo, non più di tre interpretazioni:

1°) Cartesio arrestandosi nel suo processo dubitativo alla indubitabile certezza del pensiero (non fosse altro per il suo stesso poter dubitare: « . . . ideoque scis quia te dubitare scis ») ne deduce la realtà dell'essere: se io posso pensare, vuol dire che qualche cosa sono. L'essere in questo primo senso verrebbe ad acquistare un valore empirico: si potrebbe vedere nell'*ergo sum* la necessaria conseguenza che, poichè il pensiero è l'assoluta certezza, questo ha la necessità di manifestarsi nelle azioni di cui esso pensiero è la causa: questa rivelazione concreta del pensiero io non la posso vedere immediatamente se non nel mio io. Tutto

il resto non potrà essere ricavato che dall'aver posto il mio io, che come contrapposto, cioè quando mi sarò accorto che il porre il mio io è affermazione vuota di senso se non contrappongo all' io un non io. Solo in tal modo l'io può essere determinato, come solo ponendo ciò che non è uno io posso afferrare l'essenza dell'unità. Constatazione questa semplice a farsi e antica quanto la filosofia: la troviamo in Platone ad es. quando nei suoi tardi anni tentò di darci una soluzione logica e non soltanto teleologica del dualismo netto e preciso cui l'aveva portato la dottrina delle idee: il monismo raggiunto attraverso la funzione teleologica dell' idea del Bene non poteva in fondo risolvere soddisfacentemente la necessità logica che la sua dialettica era venuta a porre (e cioè il rapporto fra l' idea e il dato sensibile) ed ecco allora l'influenza pitagorica affacciarsi nuovamente allo spirito platonico e manifestarsi attraverso la famosa dottrina dei rapporti numerici (1). In ogni modo questo non è, a mio modo di vedere, il significato del « cogito ergo sum ». Il « sum » assumerebbe qui il valore di una constatazione empirica che mal si potrebbe inquadrare nell'idealismo cartesiano. In fondo questo pensiero che ha bisogno di una manifestazione empirica per affermarsi ha un certo sapore naturalistico dal quale non va spoglio l'indirizzo immanentistico dominante oggi nella filosofia in Italia, nè l'allusione alla dialettica trascendentale di Platone, deve attenuare il sapore naturalistico medesimo.

---

(1) Senza avere nulla a che vedere con quanto qui è esposto, è notevole sull'argomento lo studio particolare del TRENDELENBURG, *Platonis de ideis et numeris doctrina* (Lipsia, 1826).

2°) Un'altra interpretazione del « cogito » ci pone il problema sotto un aspetto che nulla ha a che vedere con il precedente. In senso nettamente idealistico l'*ergo* perderebbe il suo significato di deduzione logica per non significare altro che un'identificazione intuitiva: il *sum* non è più la manifestazione concreta del pensare, non è qualche cosa di derivato dal pensare, ma è la stessa cosa: essere = essere cosciente. Quindi se io penso vuol dire che sono in quanto coscienza (1), perciò l'affermazione della coscienza come prima verità sulla quale senza alcun dubbio oramai possiamo basarci, sicurezza specifica questa che non incontriamo per la prima volta in filosofia: è già ad es. in Agostino. Questo è, credo, il vero significato della frase cartesiana. Ma questo « io sono » in quanto essere cosciente, mantenuto in questi limiti, non mi porta avanti di un passo nella conoscenza, perchè mi resta pur sempre il compito di dover affrontare in qual modo può essere questa realtà sensibile che mi circonda della quale la sicurezza espressa nell'*ergo sum* non dice nulla. Mi si riaffaccia in tutta la sua intensità il problema della dialettica platonica, il rapporto fra l'idea e la manifestazione sensibile, fra il pensiero e l'essere empirico.

Questo secondo significato è anche quello più generalmente accettato. In tal modo interpreta in fondo lo Spinoza in quegli studi giovanili sulla filosofia di Descartes che poi completò (1663) con un'appendice metafisica originale, nonchè lo stesso Kant nella « Critica » (2), perchè, malgrado l'*io*

(1) La *res cogitans* cartesiana.
(2) Tr. fr., ed. cit., pag. 345-346 (nota).

di cui si tratta è pur sempre « una rappresentazione puramente intellettiva » perchè se è vero che « senza una rappresentazione empirica che fornisce al pensiero la materia, l'atto « io penso » non avrebbe luogo » è anche vero che « l'elemento empirico non è che la condizione dell'applicazione o dell'uso della facoltà intellettiva pura ».

3°) Vi può essere infine un altro modo d'interpretazione che non è, a vero dire, che un complemento del precedente, ma che va ben oltre esso nelle conseguenze metafisiche e ben oltre le stesse intenzioni di Descartes. E cioè la constatazione del « cogito » mi dà l'immediata certezza dell'essere in quanto pensare ed essere sono identificabili, in quanto cioè, come nel caso precedente, se penso vuol dire di per se stesso che sono come coscienza; ma dalla constatazione del pensare questo o quello come elementi di una molteplicità, arriva alla formulazione della coscienza come espressione di un processo di unificazione che è già accennato in ogni atto particolare del mio pensare. Tutta la molteplicità disordinata la quale io penso trova cioè la sua unificazione nell'atto del mio pensiero e la sua espressione unitaria nella mia coscienza, che viene così a rappresentare un grado più elevato nello stesso mio processo del pensare.

La quale coscienza — tanto per intenderci chiamiamola individuale — troverà poi nella molteplicità delle altre coscienze individuali la ragione non tanto del suo essere quanto del suo rivelarsi: le quali coscienze saranno esse pure naturalmente infinite sintesi d'infiniti processi di unificazione simili al mio che troveranno la loro espressione ultima nella totalità della Coscienza, nell' Io assoluto, in Dio.

Inutile qui continuare per questa strada che ci porterebbe troppo lontano dal seminato. Ho già detto che se questo terzo indirizzo costruttivo si può ricavare dalla constatazione cartesiana noi non lo troviamo nella sua filosofia: l'ho prospettato soltanto come possibilità creatrice basantesi sul « cogito ergo sum » preso come punto di partenza.

Quello che c'importa di porre in luce è che in nessuna di queste interpretazioni Descartes avrebbe potuto proseguire attenendosi ad uno svolgimento puramente logico.

I procedimenti della logica come considereremo più ampiamente fra poco, sono rigorosamente due soli, l'induttivo e il deduttivo. Esaminate l'espressione cartesiana in tutti i sensi senza dipartirvi rigidamente da tali metodi, e vedrete che per ricavarne qualche cosa, per fondare quella moderna teoria della conoscenza che comunemente si fa datare da Descartes, dovrete presupporre un'intuizione creatrice di cui il « cogito ergo sum » non è già il punto di partenza, ma il punto d'arrivo, la naturale conseguenza del suo pensiero, che, ritornando su se stesso, esamina il cammino percorso e lo fissa nel modo noto. È una specie di processo similare, condizionato all'individuo, a quello dell'Immaginazione produttrice e della Riflessione nel pensiero di Fichte, naturalmente fatte le debite proporzioni fra coscienza assoluta e coscienza individuale e senza che vi sia incluso il subiettivismo trascendentale del filosofo tedesco.

D'altronde, che l'intuizione possa avere la più grande importanza nella filosofia è cosa notoria. Kant la definisce la « rappresentazione che può

essere data a ogni pensiero » (1), e per quanto la filosofia non possa derivare dall'intuizione i suoi concetti, certo può chiarirli a mezzo di essa (2).

Nel panlogismo spinozistico quanto siamo andati constatando in Descartes, si vede forse in modo più deciso. Oltre al valere per lo Spinoza le due considerazioni dianzi esposte per Descartes, non può qui sfuggire come lo Spinoza dia alcune volte l'impressione di compiere sforzi per imbrigliare il proprio pensiero nei limiti dell'osservazione di fenomeni anche fra i più semplici o che per lo meno tali potrebbero sembrare a chiunque i fenomeni stessi non debba forzatamente far rientrare in un ordine precedentemente fissato. In altre parole si ha alcune volte l'impressione che il pensiero di Spinoza si trovi dinnanzi a una constatazione qualsiasi della realtà come di fronte ad un ostacolo non intravveduto nella precedente intuizione ideale.

Allora il filosofo incatena il fatto stesso nella concezione prefissata; ma ciò evidentemente non si verifica in modo naturale. Non è cioè il fatto sensibile che viene conseguentemente dato come esempio confermativo a quanto precede; ma si vuole a forza farlo rientrare nell'ordine logico da cui si è partiti come da fondamento generale della realtà, quasi scopo della dottrina stessa fosse una tesi che si vuol dimostrare e non una verità, qualsiasi verità essa sia, che si vuole scoprire.

---

(1) *Critica* (tr. fr., ed. cit.), pag. 138 (analitica trascendentale). In modo meno chiaro, riguardo a questo punto particolare, nella trattazione della prova ontologica dell'esistenza di Dio e nel § 49 dei « *Prolegomeni* ».

(2) Segnatamente nei *Prolegomeni*, § 7.

Non so se rendo l'idea; ma dell'eventuale poca chiarezza di queste mie parole mi si vorrà tener venia, considerando che, per quanto il concetto in esse insito sia in me limpido e preciso, è tuttavia di ben difficile formulazione, in quanto tale mia opinione non è già effetto della ragione, ma è una specie di malessere, di impressione solamente « sentita » nel preciso significato che lo Schopenhauer attribuisce a tale parola, appunto contrapponendo il sapere, il sapere logico, al sentimento, come a qualcosa « di attualmente presente nella coscienza, ma che non è un « concetto », non è una conoscenza astratta della ragione » (1). Nello stesso significato, a maggior chiarezza esemplificativa tolgo l'allusione contenuta nello stesso paragrafo del libro dello Schopenhauer: la parola « sentito » è qui adoperata nello stesso modo in cui è adoperata dal Tennemann nella sua « Storia della filosofia » quando ci dice che « *si sentiva* che i sofismi erano falsi, ma non se ne poteva scoprire l'errore ». In ogni modo tale stato di malessere del pensiero spinozistico possiamo riscontrare nei due indirizzi estremi delle molteplici interpretazioni dei suoi commentatori, e nei critici che ce lo hanno rappresentato come pretto naturalismo (es. K. Fischer e più ancora il Whale, l'esponente tipico del realismo scettico), oppure come quello del panlogismo idealistico più rigoroso, anzi come il vero fondatore del panlogismo prekantiano, che possiamo differenziare da quello posteriore sia per il suo carattere rigidamente geometrico che lo porterà ad un dualismo irridu-

(1) *Il mondo come V. e R.*, I, § 11 (tr. it. B. Varisco-N. Palanga), Perugia, 1913.

cibile, sia per la naturale influenza che la Critica kantiana ha avuto su tutto il pensiero filosofico seguente, precipuamente con l'aver posto in luce che l'esperienza è possibile solo per l'attività sintetica dell'intelligenza che il Martinetti (1) nettamente e il Franchi (2) pure, per quanto forse in modo meno esplicito, considerano come il valore fondamentale della dottrina di Kant (3).

Certo le considerazioni che si possono fare in merito alle cause per cui derivano al pensiero spinozistico così gravi difficoltà, vanno bene al di là di questi semplici accenni, privi, l'abbiamo veduto, di qualunque esplicito fondamento razionale. Il Martinetti vede perfettamente ciò e ne attribuisce la causa in primo luogo « alla posizione assoluta dell'estensione ed al conseguente parallelismo dei due attributi e dei rispettivi modi » (4); in secondo luogo « al modo con cui egli deriva, o almeno dovrebbe derivare logicamente il mondo dal suo principio ». Questi i due punti fondamentali su cui avrebbero dovuto vertere le nostre considerazioni per fare una disamina razionale della dottrina spinozistica; la spiegazione teoretica cioè di quello che io non ho ac-

---

(1) *Introduzione alla metafisica,* I, pag. 240. Dice testualmente l'A.: « In questa dimostrazione che le forme d'unità, per mezzo di cui noi ordiniamo logicamente il contenuto sensibile, non ci pervengono dall'esterno, ma sono funzioni della coscienza, sintesi operate dal pensiero per una specie di virtù propria, sta il vero merito di Kant ».

(2) *Teorica del Giudizio,* I, pag. 155.

(3) Interessante al riguardo l'ultima lettera, riportata dal Paulsen nel suo studio su Kant, diretta dallo Schiller a Guglielmo Humholdt (2 aprile 1805). In essa si dice fra l'altro « ... alla fine noi due siamo pur idealisti e ci vergogneremmo se i posteri dicessero di noi che furono le cose a formar noi e non che fummo noi a formare le cose ».

(4) P. MARTINETTI, *op. cit.*, II, pag. 360 segg.

cennato che come impressione, forse non del tutto soggettiva, ma in ogni modo spoglia pur sempre di qualunque valore razionale. La limitatezza medesima delle mie osservazioni, se presenta l'inconveniente gravissimo di non essere convincente in quanto non dimostrativa, presenta però il vantaggio di poterne fare una questione più generale, in un certo senso quasi psicologica, e osservare che quanto si è rimproverato allo Spinoza sia in certo modo la conseguenza naturale dello stato di pensiero di tutti quei filosofi, i quali, partiti da un presupposto determinato della visione della realtà nel suo complesso, si trovano poi, costretti come sono a dover esporre logicamente la loro geniale visione del mondo, dinnanzi a piccoli inciampi particolari, che minacciano di far cadere tutto l'edificio faticosamente costruito; di tutti quei filosofi che, in poche parole, credono di poter dedurre il mondo da un presupposto ipotetico.

Nello Spinoza, e per questo mi sono soffermato un po' a lungo su di lui, ciò si vede più chiaramente che in qualsiasi altro filosofo di tale tendenza, perchè egli si attiene, più di qualsiasi altro filosofo di tale tendenza, rigorosamente al suo principio (non importa qui il dualismo iniziale) e perchè in lui possiamo trovare in modo eminente quel temperamento filosofico, che si ha come disposizione innata allo stesso modo come si nasce poeti. Quanto si è andato osservando si riscontra perciò più palesemente in lui: è lui stesso il primo che avverte l'ostacolo; il suo pensiero ha ripugnanza a far rientrare in un ambito voluto che non è il suo il tal determinato fatto particolare. Per questo ho parlato di stato di malessere (espressione non certo indicata ove le mie osservazioni

riguardassero esclusivamente la sua dottrina) che qua e là si sente nella sua « Etica » e che sotto tale forma si comunica allo studioso.

Ma riguardo a molti altri filosofi avremmo potuto fare le stesse considerazioni inerenti agli inconvenienti che tale sistema di costruire la realtà comporta. Fichte è costretto a ricorrere alla fede per spiegarci in qualche modo il suo processo dall'Io assoluto al non io. Schelling nulla ci dice del mondo sensibile, malgrado la sua filosofia della natura, se non rinunciando al suo idealismo, non troppo bene sorretto sulle sue basi dalla teogonia trascendentale originaria, e il suo pensiero oscilla continuamente fra Spirito e Natura, rendendo impossibile al critico una schematizzazione della sua dottrina. Hegel, il fortunato artefice moderno del panlogismo, manca al suo compito fondamentale che è quello di darci una visione logica della realtà, se non ricorrendo a passaggi dispotici.

Nello Spinoza inoltre — e ciò sia detto naturalmente anche per Descartes — vi è la difficoltà di doversi attenere ad argomentazioni prettamente geometriche. Ora, le scienze matematiche se sono indicate come il naturale controllo delle scienze fisiche, non lo possono essere di quella disciplina che ha per iscopo di andare al di là di tutte le scienze particolari, al di là di ogni esperienza e avente la sua funzione particolare nella concatenazione ed esclusione di concetti e non già di semplici dati, cioè della metafisica, intesa come quella conoscenza essenzialmente razionale cui non può fare a meno di tendere ogni nostra aspirazione gnoseologica.

Se è vero che la chiarezza dimostrativa è la prima preoccupazione che deve avere un filosofo,

essa non è però sufficiente per giustificare una concezione metafisica specialmente se la dimostrazione medesima significa sopra tutto analisi e analisi, si noti, che ha il suo campo d'azione in proposizioni dedotte da altre proposizioni e così via, risalendo così gradatamente a principii in gran parte da niente determinati se non dall'indispensabilità..... di avere un principio onde poter cominciare. Questi inconvenienti sono palesi sopra tutto nei discepoli di Descartes: in essi certo ben più che nel maestro; ma essi formano l'inconveniente di tutta la filosofia del secolo XVII: esempio tipico la scuola di Porto Reale.

Pascal, è vero, si accorse nettamente di questa insufficienza del metodo dominante nel tempo per arrivare con sicurezza a sapere; ma non volendo o non potendo, dato il suo temperamento di matematico nato, attribuire specificatamente l'insufficienza medesima al metodo matematico — in quanto credeva di riconoscere in essa la massima potenzialità gnoseologica dell'uomo — ritenne di poter arrivare alla conclusione dell'impossibilità del nostro conoscere inteso in senso razionale assoluto. Per non cadere nello scetticismo eccolo cercare la via di salvezza nel misticismo: ecco la fede compensare in lui quello che la ragione non poteva dargli.

Ma le cause dell'insufficienza speculativa di questa scuola in particolare e del metodo matematico in generale non hanno nulla di comune con un'insufficienza generica della possibilità d'indagine del nostro pensiero.

Il concetto di ciò che esiste realmente in natura è continuamente passibile di variazioni, mentre il concetto matematico è rigidissimo, non può

ammettere la più piccola modificazione. Come si vedrà meglio più innanzi la perennità dell'armonia delle sue proposizioni dipende principalmente dall'astrazione del suo campo d'indagine, dall'esistenza dirò immaginaria delle sue costruzioni, che non si riscontrano già nella realtà e possono perciò resistere indifferenti e immutabili a tutte le modificazioni che il pensiero nostro va introducendo nelle « cose », aggiungendo continuamente nuove scoperte a quelle già ricche del passato: per es. il concetto di un albero, di un animale, di un minerale diventerà sempre più complesso man mano che la ricerca scientifica sarà venuta modificando, sempre più completandolo, il concetto medesimo.

Ciò non può avvenire in alcun modo nella matematica in cui il concetto di ciascuno dei suoi elementi è già di per se stesso immutabile per *definizione,* la quale unicamente nelle scienze matematiche viene ad essere posta in modo insindacabile. Qualunque possa essere il valore di questo presupposto, su cui avremo a ritornare, esso sarà pur sempre ugnale a se stesso, qualsivoglia perfezionamenti possano venire introdotti col tempo e con successivi studi nelle scienze matematiche medesime.

Anche in Platone noi possiamo trovare qualche traccia di questo metodo della « *definizione ipotetica* che aveva lo scopo di provare l'utilità e la precisione di un concetto speculativo in base alla esattezza delle conclusioni che se ne possono trarre » (1), ma ciò è in lui determinato non già da una netta esigenza logica quanto dalla parti-

---

(1) Cfr. WINDELBAND, *Platone* (tr. it.), pag. 77.

colare necessità di uscire dai viluppi della sua stessa dialettica. Vi si può notare inoltre una specie di movimento di reazione contro gli Eleati, i quali, attenendosi allo stesso criterio della posizione di due tesi contraddittorie, avevano creduto di poter dimostrarne l'assurdità per le conclusioni opposte che ne sarebbero derivate.

Ma l'intendimento che anima anche qui la dialettica platonica è del tutto diverso da quello della matematica: nettamente trascendente e assoluto in quella; immanente e relativo in questa, per ammissione degli stessi matematici.

L'errore inevitabile di tutti questi pensatori — e segnatamente dello Spinoza, che più rigorosamente di ogni altro volle esporci una concezione logico-matematica del mondo — consiste precisamente nel supporre possibile di trattare alla stessa stregua dei concetti della matematica, per definizione immutabili (1), concetti forzatamente mutabili come sono quelli di tutte le altre scienze in generale e particolarmente della fisica e della psicologia, le due scienze particolari che ci danno i due punti di vista opposti su cui possiamo costruire ogni sistema filosofico: quella fornendoci la base del naturalismo (il *non io*), questa dell'idealismo (l'*io*).

(1) Questa *immutabilità* della matematica si deve intendere qui non già nel senso preciso che Kant credette ravvisare in essa, ossia per l'innatezza dei suoi principii; ma in quanto lo svolgersi della *nostra* matematica o di qualsiasi eventuale matematica possibile futura, dovrà pur sempre basarsi su presupposti presi come ipotesi-postulati e perciò non possibili di variazioni se non per volontà indipendente dal controllo della esperienza. (Cfr. in ogni modo questo studio, Cap. III, §§ 10, 11, 12).

Capitolo II.

I rapporti fra la logica e la matematica. (1)

§ 6. **Il procedimento logico nella matematica.** — La matematica è invece vegeta e rigogliosa in quanto essa ha ben più modesta funzione.

Già Kant, pure riconoscendo il carattere di verità universali e necessarie alle verità matematiche, aveva ripetutamente affermato che la matematica non può trascendere la conoscenza della realtà sensibile: essa non ci può essere cioè di nessuna utilità per la conoscenza della cosa in sè. Un più rigido idealismo ispirantesi alla « Critica » non può modificare tale insegnamento kantiano. Eliminando il concetto realistico della cosa in sè, esso ha mantennto inalterato il valore della matematica come scienza intuitiva e perciò superiore alla esperienza, e perciò, come si è osservato sopra, di potente indiscutibile appoggio per le scienze

(1) Cenni bibliografici: A. De Morgan, *Formal Logik or the calculus of inference necessary and probable* (1847); W. S. Jevons, *Pure logik...* (1864); Id., *The Principles of science. A treatise on logic and scientific method* (1873); Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (II ed., 1875); Winter, *La méthode dans la philosophie des mathématiques* (Paris, Alcan).

empiriche. Come si vede c'è già, in questo semplice riconoscimento dell'importanza della matematica come controllo delle scienze esperimentali, un implicito riconoscimento di tali scienze esperimentali verso il concetto fondamentale dell'idealismo che subordina la nozione proveniente dalla esperienza a una di natura più elevata qualitativamente superiore, proveniente dall'idea. Ma ciò non pertanto la matematica non può che parzialmente soddisfare il pensiero umano (Kant direbbe la Ragione), che tende alla conoscenza dell'Assoluto, oggetto propriamente del sapere logico, che non può essere immedesimato con l'intuizione matematica. Mentre dalla matematica discende una infinità di nozioni, dalla logica considerata in senso stretto d'induzione e di deduzione, non discende alcuna nozione. La logica non ha altra funzione che quella di potere formale, di sistemazione dell'attività della nostra intelligenza: il materiale da elaborarsi è già fornito totalmente ad essa quando possiamo stabilire fra le diverse leggi o concetti un'analogia, o, spronati dal dubbio, ricercare il perchè della contraddizione. Quale nuova nozione possiamo noi ricavare dal sillogismo? Nessuna: eppure il sillogismo è l'espressione tipica della deduzione.

Nè maggior fortuna avremmo ove esaminassimo una qualsiasi induzione. Sotto tale punto di vista anzi (quello dell'acquisizione di nuove cognizioni) la logica e la matematica, ben lungi dal rivelare fra loro sintomatici punti di contatto, offrono una palese incompatibilità.

Ma, ove si sia tutti di accordo che il procedimento rigorosamente logico nulla aggiunge alla nostra conoscenza immediata, non avendo che una

funzione mediata di controllo su di essa, vien fatto di domandarci dove le matematiche attingano il ricco corredo di nozioni che esse ci danno. Nella stessa impostazione del problema possiamo frattanto osservare come ne discenda la naturale conseguenza della non logicità del procedimento matematico. Tale illogicità, sia pure relativa, dovrebbe essere ammessa, ove conseguenti si voglia essere, da tutti coloro — e molti matematici sono fra di essi (1) — che sostengono nulla potersi apprendere di nuovo nè dalla deduzione nè dalla induzione. Tuttavia alla conclusione stessa difficilmente si rassegnano, non tanto perchè essa non sia convincente in quanto è a tutti palese il valore di questo ragionamento: « Le forme della logica sono due sole — deduzione e induzione — queste forme però non ci danno alcuna nuova nozione essendo la loro attività puramente formale; nello stesso tempo noi sappiamo che la matematica ci apprende nuove nozioni, dunque la matematica non può essere logica »; quanto perchè la conclusione può spaventare anche le menti più abituate alla indagine spregiudicata e rigorosamente obbiettiva.

Ma i matematici non hanno disarmato nel volere avere in certo qual modo il monopolio della logica: cacciati dalla porta essi vi sono rientrati dalla finestra. Non potendo cioè riconoscere nella matematica un procedimento soltanto logico, pensarono non già di logicizzare la matematica, ma di riformare la logica, mummificata secondo loro da secoli intorno alle stesse leggi. Questo il nucleo del dissidio fra la logica tradizionale aristotelico-

(1) Basterebbe citare in fisica il Mach, in matematica il Poincaré.

scolastica e la logica matematica odierna o, tanto per chiamarla con parola suggerita da uno dei suoi maggiori esponenti — il Couturat —, *logistica* (1).

---

(1) G. PEANO, *I principii di geometria logicamente esposti* (Torino, 1889); ID., *Formulario matematico* (1894-1906, 5 edizioni); ID., *Aritmetices principia, novo methodo exposita* (Torino, 1889); G. VAILATI, *Scritti,* pag. 229 segg., 659 segg., 689 segg.; M. PIERI, numerosi scritti conservati negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino; C. BURALI FORTI, *Logica matematica* (Milano, Manuali Hoepli, I ed. 1894, II ed. 1919); ID., *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXXIX, 1904); J. VENN, *Symbolic Logik* (London, I ed. 1881, II ed. London, Macmillan, 1894) (con ampia bibliografia e cenni, non geniali in verità, sui precursori matematici di Kant). Questi fra i numerosi rappresentanti della logistica in Italia. Al Peano s'inchinano però ossequienti come a maestro anche i logistici degli altri paesi. I suoi studi di logica matematica (intesa come riduzione della logica formale a un calcolo simbolico) hanno avuto naturalmente dei precursori (lo stesso Leibniz si vuol fare rientrare fra questi) degno di nota fra tutti; G. BOOLE (*The Mathematical Analysis of Logic,* Cambridge, 1847), nonchè G. PEACOCK, D. GREGORY e A. DE MORGAN, TH. SPENCER BAYNES, W. STANLEY JEVONS. Per maggiori informazioni su tali ed altri precursori il lettore può consultare: E. SCHRÖDER, *Der Operationskreis des Logikkalkulus* (1877); ID., *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1895); L. LIARD, *Les logiciens anglais contemporains* (Paris, 1878); ID., *Des définitions géometriques et des définitions empiriques* (Paris, Alcan).

I logici matematici sono però concordi nell'affermare che a Peano spetta il merito di averne per primo tentato l'applicazione della logica matematica (cfr. lo studio del Peano: « Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre* di Grassmann »).

I capi scuola della logistica contemporanea all'estero sono: FREGE, *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Deukens* (Halle, 1879); ID., *Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Unstersuchung über den Begriff der Zahl* (Breslau, 1884); ID., *Grundgesetze der Arithmetik begriffsschriftlich abgeleitet*

Per conto mio, pure riconoscendo la giustezza degli elogi che questo indirizzo ha saputo meritarsi nel campo strettamente scientifico, credo esso non ne abbia alcuno in filosofia. I pregi scientifici della logistica consistono sopra tutto — e non è poco — nella estrema rapidità e concisione della sua rappresentazione simbolica, non solo senza nulla perdere, ma anzi guadagnando in rigore espositivo ed eliminando non pochi equivoci della tradizione. Da un punto di vista gnoseologico la logistica è però mancata al suo compito fondamentale, quello appunto di riformare la logica: la logistica non ne ha colpa, se non in quanto si è accinta a un compito impossibile: riformare cioè quelle leggi del pensiero che *sono* in noi, considerandole invece come modi introdotti artificiosamente da un criterio utilitario — convenzionalistico per registrare, catalogare, ecc., le nostre conoscenze.

Questo errore fondamentale del punto di partenza spiega e in certo qual modo giustifica l'entusiasmo più sentimentale che razionale che i logistici hanno per la loro teoria. Essi stessi sono i primi ad essere meravigliati che proprio fino al secolo XIX si sia aspettato per accorgersi che si era erroneamente ragionato per millenni e millenni, non già da Aristotele cioè, ma dal primo formarsi di una coscienza. Non esiste una logica di Tizio e una logica di Caio; esiste soltanto la Logica. Tizio o Caio possono tutto al più aver dato alla Logica una data particolare struttura a seconda che il

---

(Iena, 1893); B. Russel, *The principles of mathematics* (Cambridge, University Press, 1903); L. Couturat, *Les principes des mathématiques* (Paris, 1905).

loro temperamento, il loro tempo e il loro grado di coltura potevano suggerire. La stessa grandiosità della scoperta avrebbe dovuto rendere particolarmente guardinghi e circospetti i logistici, e infatti alcuni fra questi, più o meno esplicitamente, ammettono che più che di scoperta si tratta di un ritorno a Leibniz negando nei suoi punti essenziali la dottrina matematica di Kant (1). Nella concezione leibniziana troviamo già, per quanto non categoricamente espresso, un carattere convenzionalistico nei principii matematici che è da Kant totalmente escluso e dalla logistica incondizionatamente ammesso; troviamo già la deduzione — fondamento essenziale del procedimento matematico secondo la logistica — ma credo che lo stesso Leibniz sarebbe stato molto perplesso se, malgrado tutte le attuali argomentazioni della logistica, avesse potuto vedere nella meravigliosa abilità costruttrice di questa la tomba dell'intuizione per quanto riguarda specificatamente il procedimento matematico e la soppressione della logica « tradizionale » secondo i paradossi del Russel.

Questi — si è già notato (2) — si compiace indubbiamente del paradosso e in esso vi è sempre la forte personalità scientifica del matematico inglese; ma se ammettiamo la genialità del paradosso buttato qua e là quasi a titolo di sfida, ci stanchiamo a lungo andare di una esposizione scientifica che sia tutta quanta un para-

---

(1) Questo punto particolare fu da me svolto al V Congresso Internazionale di Filosofia (Napoli, 5-9 maggio 1924) e per maggior comodità del lettore riportato alla fine del presente volume (Appendice).

(2) Cfr. questo libro, cap. I, § 1.

dosso: ci stanchiamo non già ci scandalizziamo. Il pensiero moderno è troppo allenato a tutte le possibili interpretazioni di un problema perchè l'antica sofistica o comunque, un rinnovamento parziale o totale dell'antica sofistica lo scuotano eccessivamente; ma appunto in causa di quest'allenamento il pensiero moderno non tollera gli si ammanniscano come novità genialmente paradossali, atteggiamenti di pensiero ormai decrepiti e « superati » — mi si passi la brutta parola — da un pezzo. Queste mie ultime espressioni non riguardano affatto la logistica presa nel suo complesso, ma soltanto il Russel e il Russel non in quanto matematico, non il Russel cioè dei « Principii », quanto il Russel del Congresso di Parigi del 1900 (1), il Russel di alcuni articoli ecc. in cui si compiace di affrontare il problema della verità, il problema della ricerca filosofica nello stesso modo nel quale i sofisti avevano saziato la società antica, con in meno forse l'abilità dialettica e la esposizione brillante di quelli. Mi si interpreti ad esempio una frase come questa: « Ciò che è vero, è vero; ciò che è falso è falso, e non c'è altro da dire ». L'aforisma è pieno di arcane profondità, indubbiamente, ma vien fatto allora di domandarsi se è proprio conveniente di spendere tempo e fatica per afferrarne l'intima essenza quando potremmo giurare di essere già sicuri « a priori » — proprio « a priori » — di aver già incontrato molte, troppe volte questa stessa intima essenza.

Tutto questo però — lo ripeto — non riguarda

(1) B. Russel, *L'Idée d'ordre et la position absolue dans l'espace et dans le temps* (Congrès international de philosophie, Paris, 1900).

affatto la logistica presa nel suo complesso. Se in questa la convinzione innovatrice ha potuto portare alcuni suoi esponenti a conseguenze estreme non per questo il relativismo proprio di ogni nostra conoscenza è prospettato dai logistici come una vera e propria rivoluzione introdotta nel campo del sapere. Non soltanto, ma nemmeno limitatamente alla matematica lo stesso Russel e il Couturat, strenuo difensore e ampliatore in Francia della sua dottrina, misconoscono quanto essi debbono a Leibniz (1). In ogni modo nel campo strettamente matematico rivoluzione c'è stata: il simbolismo rappresentativo e l'esclusione dell'intuizione. Non parlo del convenzionalismo dei principii fondamentali e in complesso del procedimento ipotetico deduttivo, perchè in tal caso la questione sarebbe stata vecchia quanto il mondo (2).

Come si vede questa scuola fondata in Italia dal Peano con i suoi principali collaboratori nel Pieri, Vailati, Burali-Forti, Vacca, ecc., in Germania dal Frege, rappresentata in Inghilterra dal Russel e in Francia dal Couturat, non è affatto, fondamentalmente, un'argomentazione a sfavore di quanto si è detto sin qui sul procedimento matematico se non nei riguardi dell'intuizione. La logistica in-

---

(1) B. Russel, *La philosophie de Leibniz, Exposé critique* (tr. fr., Paris, 1903, sull'originale di Cambridge, 1900); L. Couturat, *La logique de Leibniz, d'après des documents inédite* (Paris, 1901); Id., *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* (Paris, 1903).

(2) Da un punto di vista filosofico interessante lo studio pubblicato sulla *Revue de métaphysique*, 1911, pag. 280, avente appunto per titolo: *L'importance philosophique de la logistique*. Sotto questo aspetto cfr. pure in *Per la storia della logica* di Enriques il § 29 (pag. 196 segg.).

fatti esclude l'elemento sperimentale come origine delle verità matematiche e l'induzione nel proseguire. L'origine dei principii fondamentali della matematica è — secondo la logistica, pura e semplice convenzione, ipotesi, non è un « a priori » nel vero senso; ma qui non è da me ammesso (1) l'a priori in senso kantiano se non limitatamente ad alcuni principii fondamentali da cercarsi prevalentemente negli assiomi — non nei postulati — secondo l'antico criterio euclideo. Bene inteso però nei riguardi della logistica tale distinzione rispetto al carattere ipotetico o non della loro origine, non ha alcun senso: unico criterio di scelta sarà per essa non già l'antica e vieta *evidenza* — cui io credo si debba, malgrado tutto, ancora rigidamente uniformarsi (2) — ma soltanto la maggiore *comodità* — e anche questo criterio non è, si potrebbe osservare, nuovo di zecca — che le proposizioni generali medesime avranno rispetto allo svolgimento, essenzialmente deduttivo, per collegare in un tutto organico ed omogeneo queste sparse verità matematiche onde dirigerle più convenientemente

(1) Per non equivocare: se per « a priori » s'intende qualche cosa che non ci è dato empiricamente, allora tutte le proposizioni matematiche sono basate su di un « a priori ». Ma se per « a priori » s'intende qualche cosa che ci porta al necessario ed all'universale, sia pure limitatamente alla realtà fenomenica — e questo è il senso dell'« a priori » kantiano — allora credo soltanto un piccolissimo numero di verità matematiche (propriamente gli assiomi) possono essere considerate come determinate esclusivamente « a priori ». Mi limito qui ad accennare questo criterio differenziale tanto per immediatamente intenderci sulle linee essenziali dell'interpretazione della parola « a priori »: esso sarà in seguito più ampiamente svolto.

(2) Proprio nel suo senso comune di inconcepibilità del contrario.

mente e più rapidamente verso lo scopo che ci preme di raggiungere.

Trascurando i particolari di quello che io credo si possa chiamare — limitatamente al problema gnoseologico — l'illusione insita, volere o no, nella logistica per quanto si riconnette alla riforma della logica, i quali particolari solo indirettamente potrebbero rientrare in quanto andiamo svolgendo, è bene fermiamo l'attenzione nostra sul problema già accennato prima di trattare della logistica, ossia quello intuitivo. Tale incompatibilità non significa per altro illogicità assoluta — il che non sarebbe d'altronde concepibile in nessuna espressione cosciente — ma soltanto l'intervento di un altro elemento non prettamente logico e che con tutta la buona volontà mal si potrebbe costringere nella deduzione, cioè, l'intuizione.

Questa esclusione della pura razionalità dalla matematica non deve però portarci a stabilire in essa una fonte empirica e un procedimento induttivo, di basarci cioè esclusivamente su quell'esperienza che la logica pura non considera nella sua diretta espressione, in quanto essa logica interviene soltanto quando il pensiero è passato ad esaminare il substrato essenziale di quell'indissolubile fusione di soggetto-oggetto che è già nella percezione, substrato normalmente chiamato *concetto* (1).

A tale convinzione — empirismo matematico — saremmo costretti di addivenire soltanto se le fonti del sapere fossero due: il dato sensibile e l'idea (2), e si dovesse per forza schierarci con l'una o con

(1) Cfr. però questo libro, cap. I, § 1.
(2) Cfr. questo libro cap. I, § 2.

l'altra; ma la questione non ha affatto tale aspetto dilemmatico. Il dilemma sarebbe già fondamentalmente errato anche se soltanto all'esperienza o alla ragione si dovesse ricorrere per *sapere*, in quanto si è accennato sopra come il divario fra di esse non abbia ragione di essere dato che appunto in qualunque sensazione vi è già un elemento intellettivo (1); ma il dilemma medesimo ci sembrerà maggiormente insostenibile osservando che vi è una terza fonte di conoscenza: l'*intuizione*.

Di essa già abbiamo trattato nella sua più alta espressione analogica nelle scienze fisiche e abbiamo mostrato come, contrariamente a quanto la scienza sembra credere, mentre è fonte apportatrice di risultati che hanno alcune volte del meraviglioso nelle discipline particolari e segnatamente forse nell'astronomia, essa sia insufficiente in filosofia. Andremo ora man mano svolgendo quanto sino ad ora è stato implicitamente ammesso, ma non svolto: avere cioè il procedimento intuitivo la sua massima espressione scientifica nella matematica.

Senza dubbio il naturalismo, in tutte le sue gradazioni, si guarda bene dall'ammettere ciò dato che il problema dell'intuizione in se stesso considerato, è alquanto difficile ad essere trattato con mezzi che pretendono di essere essenzialmente positivi, di derivare qualunque attività esclusivamente dall'esperienza. Così i fanatici detrattori dello « a priori » originario delle proposizioni matematiche, vogliono ad ogni costo vedere in esse un elemento speri-

(1) Qui basti tale semplice accenno a questo problema che è il più importante della teoria della conoscenza e la base necessaria su cui deve appoggiarsi qualunque idealismo gnoseologico.

mentale, attribuendo alla matematica un procedimento induttivo. Lo Young (1) crede di fornirci un esempio di procedimento induttivo nella matematica (2): « Se a e b sono due elementi di una successione discreta C e se $a < b$ e s_1 il successivo immediato di a, s_2 il successivo immediato di s_1, s_3 di s_2, ecc., l'elemento b apparterrà all'aggregato $s_1, s_2, s_3 \ldots$ ». La dimostrazione si fa per assurdo.

Dov' è in tal caso il procedimento induttivo? Non lo so: l'unica induzione è in questa frase dell'A.: « Il legame fra questo teorema e il principio d'induzione matematica è evidente » (pag. 151). Non so bene se l'A. abbia voluto con questo sostenere che nella matematica, se non *prevalentemente*, figura tuttavia *anche* il procedimento induttivo. L'esempio citato è, come d'altronde quasi tutte le questioni dall'A. trattate nei suoi « Concetti fondamentali dell'algebra e della geometria », svolto molto brevemente e sopra tutto isolatamente, per niente affatto collegato con quanto precede e con quanto segue: sono note preziose se li consideriamo prese separatamente; non ci dicono gran che se cerchiamo di esaminarle nel loro complesso come un tutto organico ed omogeneo. Perciò come dobbiamo interpretare questo accenno dell'A. che ha per titolo « Induzione matematica »? Basandoci appunto sul titolo sembrerebbe doversi ritenere come un esem-

---

(1) È evidentissimo nell'esempio citato dallo Young il riferimento al principio d'induzione completo, di cui avremo quanto prima a trattare nella sua enunciazione generica. Il traduttore italiano aggiunge all'esposizione dello Young cenni bibliografici: degni di nota gli articoli ricordati del Vacca e del Combeirac.

(2) *I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria* (ed. cit., pag. 150-151).

pio, una prova anzi portata a favore dell' induzione applicata come metodo nell' indagine matematica.

Non avendo però nulla saputo trovare d'induttivo con le mie sole forze nell'esempio citato, sono ricorso al diligente studio del Benzoni (1) per vedere se in qualche modo si poteva far rientrare tale esempio nel procedimento induttivo: i miei tentativi non sono stati coronati dal successo. E si che il Benzoni esamina con scrupolo rigoroso l' induzione sia dal punto di vista storico sia da quello più rigidamente metodologico.

In ogni modo è certo che induzione non significa nel caso citato dallo Young partire dal dato empirico per arrivare all'astrazione generica. Lo Young, posto di fronte al problema del fondamento della geometria euclidea ad esempio (*op. cit.*, pag. 45), dichiara troppo esplicitamente di schierarsi a fianco dei sostenitori di un'origine non sperimentale di essa per dover insistere oltre sul caso citato. Il confronto che egli fa, sulle traccie del Poincaré, fra le proposizioni della geometria euclidea e quelle del sistema metrico decimale, ci autorizza da solo a porre lo Young fra quei matematici che negando l' a priori in senso stretto, come Kant l'intende, ammettono però pur sempre un « a priori », convenzionale e arbitrario quanto si vuole, ma non mai un'origine sperimentale che è il punto essenziale di abbattere per una teoria idealistica della conoscenza.

§ 7. **Il procedimento sperimentale nella matematica.** — La tesi dell' intuizionismo come base ***sine qua non*** per andare avanti in matematica ha

(1) R. Benzoni, *L' induzione* (Genova, 1894).

i suoi esponenti tanto in filosofia quanto fra gli stessi matematici, pensatori gli uni e gli altri non sospetti certo di attribuire alla matematica valore inferiore a quello che effettivamente le spetta. Il Martinetti tratta in diversi punti della sua opera fondamentale (1) questo problema e in tutti questi punti mostra la sua precisa convinzione della non assoluta logicità del procedimento matematico e sopra tutto l'impossibilità di considerarlo come induttivo. A pag. 426 ci dice: « Le forme possibili dello spazio sono infinite; quindi infinite le geometrie possibili in astratto », mentre noi, anche immaginando qualsiasi modificazione della nostra intuizione temporale o spaziale, non potremmo concepire alcuna modificazione nel processo logico. E più specialmente ancora per quanto ha attinenza col problema particolare che stiamo trattando, nella medesima opera (pag. 429) leggiamo: « E per la stessa ragione (2) riuscirebbe ugualmente impossibile ogni tentativo di applicazione dei procedimenti logici alla matematica; questa, per quanto sia anch'essa, come scienza (3), rivestita di forme logiche e fissata in concetti e giudizi, si forma in virtù di una logica tutta sua propria senza di cui, anche con l'aiuto di tutti i principii logici, non sarebbe possibile fare

---

(1) *Introduzione alla metafisica* (Torino, 1904).

(2) In quanto appunto « altro è l'evidenza logica, altro l'evidenza matematica », s. p.

(3) A commento di tale inciso cfr. nello stesso libro la critica all'empirismo: inoltre (pag. 225) il passaggio dall'empirismo al criticismo kantiano (idea di sostanza in Locke e Kant). Senza discutere ora sul principio dell'« a priori » puoi vedere come tutta l'estetica trascendentale di Kant e più ancora la sua « Introduzione » alla *Critica* (particolarmente polemizzando con Hume), mirino in fondo a questo, che figura incidentalmente in tale espressione: « come scienza ».

un passo oltre al primo assioma » (1). Giudizio che ci ricorda nella sua essenza quello di Kant nella « Critica » (estetica trascendentale): « Prendete, ad esempio, queste proposizioni: due linee rette non possono circoscrivere uno spazio, nè per conseguenza formare una figura e tentate di derivarla dal concetto della linea retta e da quello del numero due. Prendete ancora, se voi volete, questa altra proposizione per la quale con tre rette si può formare una figura e cercate di ricavarla semplicemente da questi concetti. Tutti i vostri sforzi saranno vani, e voi vi vedrete costretti di ricorrere all'intuizione, come d'altronde fa sempre la geometria ».

Categorico è pure lo Schopenhauer nella sua conclusione al riguardo: « Dopo tutte queste considerazioni, nessuno, spero, vorrà mettere in dubbio che l'evidenza della matematica — divenuta modello e simbolo di ogni evidenza — derivi per sua essenza non già dalle dimostrazioni, ma dall'intuizione immediata. L'intuizione qui, come dappertutto, è il principio supremo e la fonte di ogni verità; ma quella che è a base della matematica ha un grande privilegio su di ogni altra e in particolare sull'intuizione empirica..... » (2).

Nè sarà superfluo riferire in merito l'opinione di un illustre matematico, il Poincaré, per il quale la

(1) Cfr. KANT, *Prolegomeni* (tr. it.), § 2, pag. 33: « Il concetto della « linea più breve » è qualche cosa di nuovo che si aggiunge e non potrebbe per nessuna scomposizione venir derivato dal concetto di retta ». Nonchè nella *Critica* (metodologia trascendentale). Cfr. inoltre LANGE, *Hist. du Mat.* (tr. fr.), II, pag. 15 segg.

(2) SCHOPENHAUER, *Il mondo come V. e R.* (tr. it. Varisco-Palanga), I, pag. 114.

geometria euclidea è la nostra geometria « solo perchè secondo essa appunto si sono costituite la nostra intuizione spaziale e la nostra esperienza »; e la conclusione cui lo stesso Poincaré arriva trattando particolarmente della credenza di un'origine sperimentale della geometria: « Non si esperimenta su linee rette o su circonferenze ideali » (1). Il Poincaré, è vero, sembra che qua e là ammetta anche l'induzione nel procedimento matematico, ma ciò dipende appunto in quanto, essendo un matematico, considera la logica semplicemente come analisi (2) circoscrivendola in fondo al classico sillogismo aristotelico, più ancora all'applicazione degli scolastici; ma quanto ciò sia incompleto è superfluo far rilevare in filosofia, in cui la sintesi è ritenuta rigorosamente logica quanto l'analisi. Perciò il Poincaré, dovendo le creazioni di tutti i matematici uniformarsi a un procedimento analogo, e ritenendo per altro conveniente di distinguerli in « logici » ed « intuitivi » (non già per la materia che trattano che è naturalmente la stessa, ma per il loro temperamento personale), nè l'analisi pura e semplice potendo portare a nuove scoperte, trovò opportuna la denominazione d'*induttivo* al procedimento seguito da questa classe particolare di matematici da lui chiamati logici. Tale pretesa induzione però che per i suoi caratteri specifici non potrebbe

(1) H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, pag. 64. Altri punti numerosi in tutte le opere del Poincaré si potranno trovare in appoggio a tali argomentazioni. Vedi ad es. in *La valeur de la Science*, pag. 16 (il temperamento logico di Euclide malgrado la sua vasta costruzione sia dovuta all'intuizione) e pag. 17 « l'intuition ne peut nous donner la rigueur, ni même la certitude »..., ecc.

(2) Vedi segnatamente in *La valeur de la Science*, pag. 29.

essere considerata tale da un logico rigoroso, egli stesso trovò necessario di precisare meglio aggiungendovi la specificazione di « matematica » (1).

Questo riconoscimento non è, bene inteso, ammesso da lui, ma credo non si possa dubitare di queste mie considerazioni innanzi tutto per quanto si è sopra detto della voluta identità — in matematica — dell'analisi con la logica, mentre invece quella è soltanto un aspetto di questa (2); in secondo luogo per le conclusioni definitive cui il Poincaré arriva, come possiamo facilmente constatare esaminando la sua dottrina nel complesso senza troppo a lungo soffermarci sui particolari, che, presi alla lettera, possono molto spesso dar luogo ad errate interpretazioni semplicistiche.

Certo se con lo Stuart Mill noi ci limitiamo a considerare gli assiomi come generalizzazioni dell'esperienza (3), l'induzione sarebbe il cardine su

---

(1) Ecco il principio fondamentale da cui dovrebbe emergere l'induzione matematica: « Si un théorème est vrai du nombre 1 et si l'on démontre qu'il est vrai de $n+1$, pourvu qu'il le soit de n, il sera vrai de tous les nombres entiers ». (*Valeur de la Science,* pag. 21). Ora, questo « jugement synthétique *a priori*, c'est le fondement de l'induction mathématique rigoureuse », ma la parola « induzione » non deve essere qui presa alla lettera, e prova ne sia che alla pagina seguente (pag. 22) il Poincaré ci dice che tale « axiome » è determinato da quella intuizione suprasensibile che il Poincaré chiama « du nombre pur ».

(2) A tale punto crede il Poincaré di poter ammettere la sola analisi come metodo logico che il processo sintetico insito in qualunque nostra percezione, processo svolto naturalmente, quasi inavvertitamente dal nostro pensiero, e che è la conquista più significativa dell'idealismo moderno l'aver posto in luce, è da lui considerato quasi come una prerogativa della matematica, precisamente esaminata sotto il suo aspetto intuitivo e non già sotto quello logico.

(3) J. Stuart Mill, *A System of Logic...,* V, VI.

cui dovrebbero svolgersi le costruzioni matematiche; ma ove dovessimo ciò accettare alla lettera si verrebbe quasi ad annullare il valore della « Critica » kantiana nei riguardi appunto dell'esperienza. Nessuno nega, e Kant meno che mai, l'importanza dell'esperienza per conoscere, ma se dobbiamo accettare le verità fondamentali (assiomatiche) come generalizzazioni dell'esperienza, non lo possiamo fare se non accettando un'esperienza quale Kant ce l'offre, ossia un'esperienza che non significa già il complesso di constatazioni empiriche — chè allora non si avrebbero giudizi di esperienza ma soltanto giudizi « percettivi » (1) — ricavate esclusivamente dal mondo esterno; ma un'esperienza che significa la possibilità delle constatazioni empiriche medesime soltanto perchè il nostro pensiero ne stabilisce il collegamento nella « coscienza generica » (2) a mezzo dei concetti intellettivi puri « a priori ». Questo è il significato essenziale della trattazione della fisica pura nella dottrina gnoseologica di Kant.

Così stando le cose — e non vi è possibilità di una diversa interpretazione — il punto di partenza non è più il dato empirico o il complesso di dati empirici che trovano la loro espressione unificatrice nel concetto, il che potrebbe significare induzione, ma il procedimento inverso: e cioè la stessa esperienza che viene ad essere resa possibile soltanto per questa attività che va — mi si passi l'espressione — dal mondo interno al mondo esterno e che in tal modo lo rende possibile, informandolo: « l'in-

(1) Cfr. particolarmente i §§ 18, 20 dei *Prolegomeni,* e in generale tutta la trattazione della fisica pura.

(2) überhaupt.

telletto non attinge le sue leggi (a priori) dalla natura, anzi piuttosto le impone ad essa » (1).

L'empirismo dello Stuart Mill al riguardo non significa che un passo indietro, non significa che puro e semplice ritorno a Hume, e questo non è d'altronde il solo punto nel quale lo Stuart Mill rivela la sua imperfetta comprensione di Kant.

Ora, se un procedimento logico vogliamo riscontrare nel tanto abusato punto di partenza — l'esperienza — dobbiamo ammettere che l'esperienza stessa, per essere considerata fonte di conoscenza, non è già più qualche cosa di semplice in se stessa; ma è già il frutto, è già il derivato di un precedente processo puramente intellettivo che solo lo determina. Perciò quando diciamo che anche una forte corrente idealistica ammette che ogni conoscenza ha a che fare con l'esperienza, non dobbiamo dimenticare come alla formazione di questa esperienza si sia arrivati.

Questo, bene inteso, non è il significato corrente della parola esperienza, ma possiamo noi forse dare alla parola medesima un significato diverso da quello sopra esposto quando oggi, dopo Kant, parliamo di essa esperienza in sede scientifica come fonte conoscenza? Nè dobbiamo qui lasciarci eventualmente fuorviare dal famoso « principio d'induzione completa » per arrivare appunto a vedere un procedimento induttivo o, comunque, il riconoscimento di un procedimento induttivo nella matematica. Il principio d'induzione completa è esso pure basato come ogni altro su di un procedimento intuizionistico-deduttivo. Scoperto nel secolo XVI da un matematico italiano — Francesco Maurolico

(1) *Prolegomeni*, § 38.

— esso afferma che se una proprietà è vera di un numero intero qualunque, è pure vera anche del numero che segue, ossia, più generalmente, la proprietà medesima è vera per tutti i numeri maggiori (interi) quando si è constatato che essa vale per un numero intero dato. Il Poincaré l'anuncia molto chiaramente e brevemente così: « Se una proprietà è vera del numero 1, e se si constata ch'essa è vera per $n + 1$, purchè essa lo sia di n, essa sarà vera per tutti i numeri interi » (1).

Non vi è alcun bisogno di un particolare approfondimento del principio d'induzione completa per comprendere che soltanto un equivoco terminologico potrebbe riconoscere in esso una base induttiva. Ciò non pertanto si è proprio voluto vedere in esso un procedimento induttivo in senso stretto, mentre, nota giustamente il Brunschwicg, « è un principio di *deduzione progressiva,* la cui applicazione è sicura « a priori » del successo, poichè i numeri sono i prodotti di questa deduzione progressiva » (2).

Pure attenendoci al concetto più generale del procedimento induttivo dove si vede nel principio d'induzione completa un passaggio dal particolare al generale, bisognerebbe considerare come particolare il numero dato e come generale il numero $n + 1$, ma non è forse già quello una generalizzazione astratta? Non sono già forse 1, 2, 3 . . . simboli concettuali nello stesso modo come $n + 1$? Forse soltanto perchè questo può, in aritmetica, significare maggiore indeterminatezza — e anche

(1) Cfr. ad es, la *Revue de métaphysique* (1905, pag. 818), e in *La Valeur de la Science,* pag. 21.

(2) *Les étapes de la phil. math.,* II ed., pag. 483.

questo è molto discutibile — possiamo quello considerare come *dato* più intuitivamente, più naturalmente di questo? Il numero 1 è una generalizzazione sintetica nello stesso modo che un numero qualsiasi indicante milioni di milioni: mettiamo n per significare più rapidamente e più comodamente questo numero e poichè neppure esso n può costituire un limite, estendiamo il nostro ragionamento anche ad $n+1$ e così di seguito, ricominciando in tal modo una nuova serie in nulla differente dalla precedente. Considerazioni, come si vede, che anche il solo buon senso può suggerire, ma che alcune volte si rendono necessarie onde non si possa costruire sull'equivoco. In tal caso l'equivoco è terminologico e perciò più facile forse ad essere eliminato: bisognerebbe però cominciare con il bandire la infelice espressione di « principio d'induzione completa » (1).

In ogni modo per quanto riguarda il Poincaré, non credo possa ritenersi che il principio medesimo sia da lui considerato come una vera induzione. Esso può nella sua dottrina esser ridotto con la massima facilità all'intuizione e precisamente a quell'intuizione che noi abbiamo chiamata nel I capitolo « ideale » e che il Poincaré, contrapponendola all'intuizione sensibile, chiama « intuition du nombre pur ». Il principio d'induzione completa considerato dal Poincaré in « La Valeur de la Science » come « il fondamento dell'induzione matematica rigorosa » (pag. 21), viene ad essere consi-

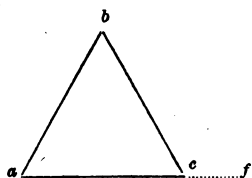
(1) *Cenni bibliografici:* F. Enriques, *De la méthode dans les sciences* (Paris, Alcan); Whewell, *History of inductive sciences* (London, 1837); P. Boutroux, *Les principes de l'analyse mathématique, Exposé historique et critique* (Paris, Hermann).

derato dal Poincaré subito dopo (pag. 22) come sorretto appunto sull'intuizione del numero puro: dove la necessità dell'induzione? Come principio fondamentale « a priori » assiomatico non ha alcun bisogno — direi quasi non ha alcuna *possibilità* — di essere appoggiato nè alla deduzione, nè all'induzione: nella sua applicazione è essenzialmente deduttivo, com'è deduttivo qualsiasi teorema che si ricava da un assioma o da un postulato.

Meno esplicito è il Mach. Veramente non mi pare che questo punto sia stato da lui particolarmente trattato. Egli accenna però qua e là implicitamente alle deduzioni della matematica, ma una sua esposizione di carattere chiaro ed organico del procedimênto di questa scienza, non la conosco. Possiamo dire anche che la sua opinione in merito presenta non poche oscillazioni perchè, mentre egli è il primo a riconoscere e a ripetutamente insistere che spesso le scienze attingono molto da un fondamento aprioristico, in ultima analisi mi pare si possa affermare ch'egli considera anche tali astrazioni originarie di natura empirica, in quanto, se non altro, poggiantesi sopra fatti precedenti di esperienza sia individuale, sia collettiva. Per quanto riguarda l'argomento che stiamo trattando, è particolarmente interessante il capitolo dedicato alla psicologia della deduzione e dell'induzione nel suo libro « La conoscenza e l'errore » (1). In esso, pure sostenendo con la sua abituale lucidità di esposizione che tanto la deduzione quanto l'induzione nulla possono aggiungere alla nostra conoscenza, figura un'espressione che, presa nel suo preciso

(1) Mach, *Erkenntnis und Irrtum* (Skizzen zur Psychologie der Forschung), Leipzig, tr. fr., Paris, 1919.

significato, ci autorizza quasi a supporre che il Mach ritenga le verità matematiche basate in ultima analisi sull'esperienza. Vediamo di chiarire con criterii nostri tale punto controverso, ricordando che esso ci è dato dall'opinione espressa dal Mach essere la base fondamentale di ogni verità ricavata dal concetto di triangolo « il fatto *sperimentale* che la somma degli angoli di tutti i triangoli piani che noi possiamo misurare, non differisce da due retti ».

Prendiamo l'esempio seguente che è il più semplice che la geometria piana può fornirci per mettere in chiaro l'opinione dell'A. Supponiamo di avere un triangolo *a b c*. Se prolunghiamo il lato *a c* fino a un punto qualunque *f*, noi otteniamo un angolo esterno *b c f*, che sappiamo essere uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti, ossia avremo:

$$b\hat{c}f = a\hat{b}c + b\hat{a}c$$

Da cui possiamo altresì ricavare che, ove nell'ipotesi si fosse ammesso trattarsi di un triangolo isoscele si avrebbe:

$$b\hat{c}f = 2\hat{a}\,;\ b\hat{c}f = 2\hat{b}$$

e così via, e ciò appunto abbiamo potuto stabilire perchè sappiamo che la somma degli angoli del triangolo *a b c* è uguale all'angolo piatto *a c f*, ecc. Ma non possiamo assolutamente riconoscere che questa verità geometrica non sia a sua volta basata, come ogni altra, sull' intuizione originaria di alcuni principii fondamentali « a priori »: nel caso particolare sulla stessa definizione di triangolo.

Ma ciò dipende forse da una certa imprecisione dei vocaboli. Egli definisce l'intuizione « tutto il sistema di sensazioni coordinate nello spazio e nel tempo che ci offre il senso della vista a mezzo del quale noi riconosciamo d'un colpo d'occhio la distribuzione dei corpi e dei loro movimenti reciproci » (1). E, ciò che trovo incomprensibile, aggiunge che « il vocabolo porta nettamente la sua impronta originaria ». Il criterio etimologico del Mach al riguardo è quanto mai discutibile perchè questa sua affermazione non ha ragione di essere se non considerando che in tedesco la parola *Anschauung* significa propriamente intuizione (2), ma il vocabolo ha la radice in comune con *Anschauen* (riguardare, rimirare) e così via. In ogni modo la questione etimologica non ci interessa: occupiamoci piuttosto della definizione riportata e non delle considerazioni che seguono. Tale definizione mi sembra del tutto inadatta a dirci che cosa sia l'intuizione, ed è una definizione che caso mai uno psicologo ad es. avrebbe potuto dare della *percezione*, che pertanto, rigorosamente parlando, nulla ha a che vedere con l'intuizione che è procedimento astratto di pensiero, formandosi prima della visione dell'oggetto e non già della conoscenza sensibile dell'oggetto medesimo. Che poi tanto la percezione quanto l'intuizione si debbano basare sull'associazione delle immagini, ciò non equivale certo a stabilirne l'identità. Se consultiamo la psicologia mi pare che il suo responso non possa dar luogo ad

---

(1) Mach, *op. cit.* (tr. fr.), pag. 159-160.

(2) L'intuizione p. d. come è stata qui intesa si renderebbe forse meglio in tedesco con *Einfall* nel suo senso particolare di idea improvvisa, di sprazzo geniale.

equivoci. Il Peillaube (1), in cui trovai la più completa esposizione della formazione psichica della percezione, definisce questa come « un complesso di stati psicologici, di sensazioni, d'immagini, di ricordi, di giudizii e di ragionamenti a proposito di una impressione *attuale* » mentre il concetto di intuizione comporta il principio di un avvenimento futuro e che perciò non può essere basato principalmente sulla vista come il Mach sembra credere. Il Vaissière, pure trovando esatta la sopra esposta definizione del Peillaube la giudica però un po' imprecisa in quanto forse non sufficientemente determinata e la vorrebbe completata nel modo seguente di cui non possiamo non riconoscere la assoluta chiarezza: « La percezione è una fusione della sensazione eccitatrice con le immagini associate » o più specificatamente « una fusione di oggetti rappresentati dalla sensazione con gli oggetti rappresentati dalle immagini associate » (2).

In ogni modo tale imprecisione di linguaggio nel Mach risulta evidente anche da altri punti (pagg. 194, 206-209, 197, 308 dell'*op. cit.*). Nè di tale fatto dobbiamo meravigliarci oltremodo, dato che possiamo osservare di passaggio come non soltanto nel comune linguaggio, nè in quello di studiosi non specializzati in psicologia troviamo equivoci terminologici, ma anche negli stessi psicologhi. L'insufficienza del linguaggio è infatti considerata dal James come la prima fonte di errori nella psicologia, sia per la frequente mancanza di termini in quanto « è assai difficile localizzare l'attenzione su di una cosa senza nome » (3), sia, alcune volte, per l'uso

(1) Peillaube, *Les images.*

(2) Vaissière, *Psychologie expérimentale,* pag. 145-146.

(3) James, *Compendio di Psicologia* (tr. it.), pag. 80.

errato dei vocabili esistenti che si estende anche a concetti fondamentali della psicologia, fra cui fra la stessa *sensazione* e la *percezione*, pertanto nettamente separate, sopra tutto in una vita primitiva e nell'infanzia. E in modo più categorico e sopratutto più generale in quanto esteso all'espressione tutta del pensiero e non alla sola psicologia, si esprime il Condillac per il quale tutta l'indagine del pensiero è in fondo — opinione che certo non possiamo condividere spinta a tale estremo limite — la conseguenza o no di « une langue bien faite »: nello stesso modo il Leibniz vede nell'analisi precisa intorno al significato delle parole il fattore più importante per la comprensione dei procedimenti intellettivi (1). Ciò osservato possiamo benissimo spiegarci come il Mach, fisico, abbia insistito tanto sulla parte sensibile di quel processo che egli chiama intuizione, tanto da darci una definizione che nel complesso, ma sempre con le dovute riserve di cui sopra, è molto più vicina alla formazione della percezione, non esclusa quella particolare importanza del senso della vista considerato come superiore a quella d'ogni altro e non esclusi i movimenti dei corpi, che ci darebbero quel sesto senso (movimento) normalmente ammesso dalla moderna fisio-

(1) Da un po' di tempo a questa parte si nota una pregevole tendenza ad attribuire alle parole l'importanza loro dovuta per meglio comprendersi. Interessante al riguardo la comunicazione del COUTURAT (*D'une application de la logique au problème de la langue internationale*) al III Congresso inter. di filosofia (Heidelberg, 1908).

Cfr. pure la prolusione al corso libero di storia della meccanica all'Università di Torino (1898) del VAILATI avente per titolo *Alcune osservazioni sulle questioni di parole nella storia della scienza e della cultura* (Torino, Bocca, 1899). Anche in *Scritti*, pag. 203-228.

logia. Altri punti di tale definizione del Mach si potrebbero qui porre in discussione e primo fra tutti la disinvoltura con cui egli — anche attribuendo la sua definizione alla percezione e non all'intuizione — sorvola sul « colpo d'occhio », per cui diverse sensazioni ci appaiono in una sintesi come una sola cosa. Ora, se nell'adulto civilizzato possiamo considerare ciò come un fenomeno normale creato dall'abitudine, si può tuttavia con facilità mettere in luce che tale sintesi non è nel bambino e non è nel primitivo (1). L'uno e l'altro prima di arrivare alla percezione di un oggetto come noi l'abbiamo qui inteso, passano attraverso ai diversi stadi in cui si manifestano dapprima separatamente tutte le diverse sensazioni la cui sintesi formerà poi la percezione di quell'oggetto; processo questo che ha fatto molto riflettere sulla forma ragionativa (sillogistica) della percezione, filosofi come lo Schopenhauer e il Wundt.

(1) Non mi sembra inutile far qui osservare come, essendosi molto abusato riguardo alle analogie psichiche fra il bambino e l'uomo selvaggio, l'allusione medesima sia qui da me fatta unicamente limitantesi a questo caso particolare — il che non vuole però dire, per contro, che questo sia l'unico punto di contatto fra le due coscienze. Così, p. es., non si può sostenere nel caso dell'uomo primitivo quanto ci dice giustamente il Janet (*Eat mental des hystériques,* pag. 70 segg.), che il difetto di intelligenza nel bambino dipende prevalentemente nell'assenza di ricordi, d'immagini, di tendenze preorganizzate, ecc. Tali mancanze non sono evidentemente nel selvaggio adulto: esse possono essere supposte in lui solo in modo parzialissimo e unicamente per quanto può avere attinenza con il problema ereditario; soltanto cioè in quanto i suoi progenitori gli avranno lasciato poca attitudine a ricordare e a compiere quel processo rapidissimo di associazioni per cui l'adulto civilizzato riconosce immediatamente un oggetto come noto, sia come simile, sia come identico a quello già percepito o immaginato in passato.

Tutto ciò a esplicazione della poca chiarezza dell'atteggiamento del Mach di fronte al carattere intuitivo dei principi matematici e al loro dubbio valore logico. E su questo punto dobbiamo ancora insistere essendo per noi fondamentale, dato che ci siamo proposti di dimostrare come le stesse scienze si servano molto spesso di una base essenzialmente astratta, com'è l'ipotesi, per poter proseguire, mentre tanto volentieri l'astrazione esse rimproverano ai « castelli in aria della metafisica ». Possiamo pertanto notare come nel fisico Mach, mutato il senso della parola « intuizione » in quello più positivo di « percezione », troviamo ciò non pertanto l'intuizione confusa alcune volte con « l'immaginazione » (pag. 199, *op. cit.*) che a sua volta non è bene distinta, nel libro medesimo (1) dalla « allucinazione »; ma, senza divagare in constatazioni non indispensabili sull'imprecisione dei vocaboli adoperati, c'interessa però mettere in luce qui come quell'intuizione che particolarmente ci importa di conoscere in quanto è stata da noi considerata come la base fondamentale di qualunque procedimento matematico, sia dal Mach ammessa sotto la denominazione suggestiva di « esperimento mentale » (2).

Ora, scientificamente parlando, noi non possiamo considerare l'immaginazione come un'associazione di elementi « che non si sono mai riscontrati negli avvenimenti della nostra esistenza ». Il processo immaginario è del tutto differente: è cioè un fenomeno che pure non accordandosi con una sensazione attuale, è tuttavia il ricordo di una sensazione

---

(1) Cfr. ad es., la definizione a pag. 163 dell'op. cit.

(2) MACH, op. cit., pag. 209.

passata: in altre parole l'immagine è nella serie debole quello che è la percezione nella serie forte. Così stando le cose è evidente come l'immagine, ben lungi dal poter essere considerata come il prodotto arbitrario — sia pure geniale, qui non importa — della nostra fantasia, si verifica sempre nell'uomo in istato normale. L'anormalità è il contrario; quando cioè noi non possiamo per « dimnesia o per amnesia rappresentarci attualmente quanto altra volta percepimmo » (1).

Si comprende benissimo come tutto quanto andiamo osservando non abbia per nulla affatto carattere accademico, ma abbia il preciso senso di mostrare, incidentalmente, come il non esatto significato di una parola, possa far travisare tutto il pensiero di uno scrittore e far restare perplesso e dubbioso il lettore attento; ma sopra tutto di mostrare come il Mach possa affermare che ogni nostra conoscenza derivi dall'intuizione nelle sue forme d'intuizione sensibile e d'intuizione astratta, pur restando fedele al suo concetto dell'origine sensibile di ogni nostra conoscenza. Tale equivoca fusione di concetti è rappresentata dal suo *esperimento mentale.* Questo non si distingue, per quanto egli ne parli ampiamente a parte (Cap. XI), fondamentalmente dall'immaginazione, sempre stando naturalmente al suo concetto d'immaginazione. È

(1) La *dimnesia* si riscontra quando congenitalmente o accidentalmente i ricordi non possono essere fissati; l'*amnesia* si riscontra quando il ricordo è stato sì registrato e fissato, ma si perde in seguito a traumatismo o emozione violenta o deterioramento progressivo del cervello come ad es. nella paralisi generale. Il caso anormale opposto ai precedenti ci è dato dall'*ipermnesia* in cui dei vaghi ricordi riprendono la più grande intensità. (Per tutto ciò cfr. VAISSIÈRE, *Ps. Ex.*).

questo esperimento mentale che noi saremmo proclivi a chiamare *intuizione*. Semplice questione di nomi? Niente affatto; pure essendo convinti in ogni modo che anche una semplice questione di nomi possa in alcuni casi portarci molto lontani nelle nostre conoscenze, dobbiamo qui osservare come il fatto sia più complesso.

Dipende cioè dallo stabilire come, anche per il Mach, la matematica abbia un' origine intuitiva, non già nel suo senso di parola intuizione, ma precisamente nel vero senso di essa, ossia in quel concatenamento di fatti o cose note, che percepiamo attualmente, o di cui ci rappresentiamo le immagini da cui si possa passare ad intravedere mentalmente un nuovo fatto o cosa, o serie di fatti o di cose: procedimento puramente intellettivo questo, e perciò proprio soltanto di uno sviluppo avanzato del pensiero, di cui invano si cercherebbe un'origine empirica, dato che si comprende benissimo come il fatto o la cosa non sia che un punto di partenza apparente. Il punto di partenza reale non ci è dato effettivamente che da quell' improvvisa idea per cui ci vien fatto di pensare che la « cosa » o il « fatto » noto può mettersi in correlazione con altra verità che non conosciamo ancora, nè che possiamo affermare basandoci esclusivamente su questo sprazzo di luce interiore, ma che ci proponiamo di dimostrare logicamente o, almeno, provare sperimentalmente.

Questa è l' *intuizione* e ad essa si avvicina molto l'esperimento mentale del Mach anche se la parola « esperimento » può trarci a conclusioni errate sulla sua origine.

Da tale esperimento mentale fa il Mach derivare le proposizioni matematiche. Nello svolgimento che

di esso ci dà l'A. resta però sempre connesso un certo carattere sperimentale sia per mantenersi fedele alla denominazione stessa di tale processo del pensiero, sia per la trattazione di esso, sia per lo appellarsi ad Eulero quasi a conferma della sua esposizione.

Tale mio concetto d'intuizione differisce anche da quello del Poincaré (1) il quale non distingue bene l'intuizione dalla *rappresentazione*. Quella differisce da questa in quanto il suo processo non si limita ad essere immaginativo. L'equivoco del Poincaré dipende qui dal non avere egli veduto che, mentre la rappresentazione si limita soltanto a riprodurre mentalmente una figura che noi non abbiamo fissata sensibilmente (di solito in modo grafico) l'intuizione va bene al di là di ciò: essa ci mostra altresì che quella figura *deve* essere così e non altrimenti.

Così, se noi abbiamo una retta *AB* e su di essa un punto *C* qualunque e poi fissiamo un altro punto qualunque su *AC*, sappiamo che il punto

A | *C* *B*

medesimo sarà pure su *AB*. L'associazione delle immagini può dispensarci dal dover fissare graficamente la retta *AB* ecc., ma null'altro. Soltanto l'intuizione può farci comprendere che il nuovo punto fissato in *AC* deve per forza essere pure su *AB*. Sono certo due processi immediatamente susseguenti, ma che è bene tuttavia tenere distinti in quanto appunto l'intuizione non è contemporanea, ma susseguente alla rappresentazione mentale.

(1) *La Valeur de la Science,* pag. 21.

In altre parole questa specie d'intuizione del Poincaré è ciò che Kant chiama molto opportunamente « costruzione di concetto », che non significa soltanto rappresentazione grafica, ma anche rappresentazione « a mezzo della semplice immaginazione nell'intuizione pura (1) ». È desso il solo campo d'azione nel quale possa esplicarsi l'attività del matematico.

§ 8. **Il procedimento intuizionistico della matematica.** — Ma nemmeno limitato al significato esposto nel paragrafo precedente, possiamo accettare il « fatto di esperienza » del Mach nella matematica: nè con questo crediamo di togliere, ma bensì di aggiungere qualche cosa al valore di essa rispetto alla sua posizione nella teoria della conoscenza. La matematica è precisamente quella disciplina — la logica non essendo che semplice controllo formale del sapere e, inoltre, di un sapere, come vedremo, qualitativamente superiore — che abbia rigoroso carattere scientifico senza avere bisogno alcuno dell'esperienza.

Come si è veduto il nostro concetto d'intuizione non è in deciso contrasto con il fattore sensibile che è sempre implicito in qualunque fatto o cosa: non si tratta qui cioè dell'intuizione puramente intellettiva di Descartes (2), la quale, se si può ammettere benissimo anche senza accettare incondizionatamente la sua dottrina delle idee innate, non ha tuttavia nulla a che vedere con l'ipotesi,

---

(1) Per maggiori ragguagli su questo punto particolare vedi questo libro, Cap. III, § 10, pag. 101 segg.

(2) Cfr. questo libro, Cap. I, § 3. Essa è quell'intuizione da noi chiamata, tanto per intenderci, ideale.

in quanto preesiste a qualunque possibilità di formularne. Ciò non pertanto il lato sensibile che è in ogni fatto o in ogni cosa — non fosse altro l'azione formale sensibile del tempo nel « fatto » e dello spazio nella « cosa » — non si verifica più nel processo intuitivo propriamente detto, ma questo è un processo d'inspirazione astratta e semplificato al possibile. Certo anche l'intuizione ipotetica si appoggia, come qualsiasi altra funzione psichica, su di uno svolgimento che si opera in noi attraverso il tempo, ma tale svolgimento non è già determinato dal contatto con il mondo esterno, ma si opera in noi, nella nostra stessa coscienza alla cui sempre più complessa, sempre superiore formazione, l'influenza esterna non fornisce che le cause apparenti, che fattori incidentali del suo svolgimento.

Nè se nella formazione originaria delle cause determinanti il processo psichico dell'intuizione non vedessimo alcun lato sensibile, noi saremmo coerenti nell'affermare che essa può avere efficacia soltanto nei riguardi di una conoscenza non assoluta, qualitativamente inferiore a quella cui possiamo arrivare prescindendo da ogni lato sensibile, come abbiamo incidentalmente notato e come mostreremo più esaurientemente fra poco: noi potremmo allora sostenere l'identità del procedimento intuitivo con quello puramente razionale, cosa che ci guardiamo bene dall'affermare.

Ora, se noi adottiamo la tripartizione accettata dal Leibniz, per la quale ogni nostra conoscenza ha un'origine intuitiva o dimostrativa o, con le debite precauzioni, sensibile (1), noi non possiamo

(1) Cfr. LEIBNIZ, *Nouveaux Essais*, IV, 3.

fare a meno di porre le verità matematiche nel primo ordine per quanto riguarda i principii fondamentali, in un ordine intermedio fra il primo e il secondo per quanto riguarda le verità derivate (teoremi, corollari, scoli); non mai nel terzo (il sensibile), se intendiamo per esso la constatazione empirica.

Tale carattere intuitivo delle verità matematiche vide perfettamente Kant dicendoci che « la matematica pura è adunque possibile solo in quanto essa non si riferisce che agli oggetti dei sensi, alla cui intuizione empirica sta a fondamento una intuizione pura « a priori » (1) la quale non è altro che la pura forma della sensibilità, che preesiste all'apparizione degli oggetti; ed anzi è quella che sola nel fatto la rende possibile ». E maggior forza acquisterà la conclusione di Kant sull'argomento ricordando che i suoi principii « a priori » poggiano su altrettante intuizioni.

In tale brano di Kant è evidente l'esclusione del procedimento logico come di quello sperimentale. Effettivamente se l'intuizione ci è molto comoda in qualunque teoria della conoscenza, non può dare un'esauriente risposta ai nostri dubbi, che soltanto dalla logica possono essere appagati. Una conoscenza intuitiva può avere valore soltanto quando siamo posti di fronte a un caso singolo; ma da questo non possiamo mai risalire alla generalizzazione cui si può arrivare soltanto facendo appello alla ragione e non semplicemente all'intelletto (2). Lo Schopenhauer anzi, ben lungi dal

(1) Tempo e spazio.

(2) Ragione e intelletto sono qui usati nello stesso significato dello Schopenhauer (*op. cit.*, ed. cit.), I, 12.

considerare l'intuizione una forma attinente alla logica, la oppone a questa da un punto di vista gnoseologico (1), pure riconoscendo il grande valore dell'intuizione come il mezzo più rapido (2), se non più certo, per conoscere, e, in estetica, come l'unico mezzo che possa essere di fondamento alla creazione dell'opera d'arte. Nè diversamente in fondo conclude il Croce, malgrado il suo poco rispetto per lo Schopenhauer, quando fissa le nostre possibilità di conoscere in intuitive e logiche, quasi contrapponendo le une alle altre; contrapposizione che possiamo già trovare nella stessa « Critica della Ragion Pura », in cui, distinguendo fra intuizione e concetto, Kant ci dice che « per la prima un oggetto ci è dato, per il secondo esso è pensato nel suo rapporto con questa rappresentazione ».

Che poi su pochi principii presi come punto di partenza si possano costruire un'infinità di altre verità dimostrabili — e che la matematica indubbiamente dimostra — e che poi tutte queste verità prese nel loro complesso, ossia tanto quelle aventi carattere assiomatico — es. il tutto è maggiore di una sua parte — che quelle aventi carattere dimostrativo (teoremi), che tali verità, dicevamo, possano molto spesso — non sempre in ogni modo — avere riscontro anche nell'esperienza, allora entriamo in tutt'alro ordine d'idee e sul quale

(1) SCHOPENHAUER, *op. cit.*, § cit..

(2) La « rapidità » è considerata pure dai matematici come uno dei vantaggi essenziali della generalizzazione algebrica. (Cfr. BOUTROUX, L'*Idéal scientifique des mathématiciens*, pag. 82). La « sicurezza » del Boutroux, valida per un matematico, deve naturalmente ritenersi condizionata in filosofia per quanto si va appunto trattando.

siamo tutti d'accordo. Si verifica cioè nel procedimento delle matematiche una specie d'inversione a quanto di solito si riscontra nella fisica. Questa parte, normalmente (1), dal lato empirico e perchè le sue leggi possano avere valore rigorosamente scientifico è necessario che passino sotto il controllo dell'astrazione logico-matematica: la matematica invece, partendo da principii puramente astratti, « a priori » (2), *può* trovare la sua conferma nell'esperienza.

Da quanto detto possiamo rimarcare la posizione privilegiata che ha la matematica rispetto a qualunque altra attività del pensiero. Essa ha il vantaggio sulla logica — presa nel suo preciso significato di pura azione formale del sapere concettuale—di poter fornire nozioni al nostro patrimonio conoscitivo e di poter ricevere dalla rappresentazione sensibile (3) dei suoi concetti una maggiore evidenza e una più generale accessibilità. Essa ha il vantaggio sulle scienze fisiche che le sue verità presentano quel valore universale e necessario che queste non possono dare alle proprie se non facendo appello a entità astratte che trascendono il loro campo d'azione, e che esse adottano non solo senza conoscerle, ma pretendendo di negarle (ba-

---

(1) L'ipotesi come intuizione geniale come noi l'abbiamo considerata, non è il procedimento normale delle scienze fisiche. (Cfr. più esplicitamente questo lavoro, pag. 76-79).

(2) Avremo più tardi a trattare dell'inaccettabilità (fisica) dei principii sintetici « a priori » di Kant della fisica pura.

(3) Cioè la rappresentazione grafica delle figure geometriche. La necessità di tale genere di rappresentazione verrà più avanti spiegata. Per ora basti osservare che la consideriamo nello stesso modo come è in Kant (*Critica,* tr. fr., ed. cit., pag. 214, metodologia trascendentale).

sterebbe per tutte l'attività stessa del nostro pensiero) (1). Essa presenta infine il vantaggio su entrambe — il sapere logico e le scienze fisiche — di svolgere il suo campo d'indagine in un mondo che non può soffrire, per definizione, variazioni di sorta.

Non crediamo di dover trattare qui la natura e sopratutto il valore di tali presupposti della matematica che svolgeremo nella seconda parte: ne è conveniente di trattare le particolari questioni che riguardano l'essenza delle definizioni matematiche. Su di essa i pareri e le distinzioni e suddistinzioni sono molteplici già dai primi albori della scienza stessa — forse già lo stesso Talete di Mileto ebbe a trattarne — ininterrottamente fino ai giorni nostri, con la distinzione in definizioni « reali » e « nominali » di Aristotele, attraverso i critici e commentatori medievali e ai grandi filosofi matemateci come Hobbes e Leibniz fino alla scienza metageometrica dei giorni nostri (2).

---

(1) La fisiologia in stretto senso si limita a ritenere il pensiero un movimento del cervello senza considerare che quando anche potessimo precisare — ciò che non è — i singoli movimenti del cervello (che d'altronde non sappiamo nemmeno se sia la sede della sensazione) ci resterebbe pur sempre di spiegare che cosa sia il pensiero a meno di sostenere l'assurdo dell'identità pensiero-movimento. I fisici più avveduti non incorrono più però in simili incongruenze. Cfr. anche MACH, *Analisi delle sensazioni*, e AVENARIUS, *Idea degli uomini sul mondo*, di cui il Mach riporta (pag. 33-34, op. cit., nota) testualmente: «Il cervello non è... alcuna sede... Il pensiero non è un inquilino e un padrone, ecc...., e nemmeno una funzione fisiologica ».

(2) Informazioni riguardo all'essenza della definizione potrai trovare, corredate da spunti critici, in F. ENRIQUES, *Per la storia della logica,* Cap. II, nonchè dello stesso A. la *Critica della definizione* in *Problemi della Scienza.* Per maggiori

Ma fin d'ora possiamo osservare come la caratteristica dell'immutabilità della matematica è intimamente connessa con la sua prerogativa della *definizione*.

Dice la geometria: dalla definizione posta di cerchio, sappiamo che per esso dobbiamo intendere quella qualsiasi delimitazione spaziale che presenta la prerogativa di avere tutti i suoi punti ugualmente distanti da un punto interno detto « centro ». Noi abbiamo già l'idea di « punto » — e questa è un'altra definizione e, sotto un certo punto di vista, contradittoria (1), per quanto riguarda l'estensione inestesa di esso su cui il matematico invano si affanna. — Da questa tale determinata figura che siamo d'accordo di chiamare cerchio, noi possiamo andare oltre stabilendo queste e quest'altre verità, di cui le prime discendono direttamente dalla stessa definizione di cerchio, altre verità da queste prime e così via (2).

E tutto ciò, diciamo noi, è — almeno nelle verità derivate — rigorosamente dimostrato e perciò i giudizi matematici presentano quel carattere di universalità e necessità che hanno i giudizi logici e che non hanno, nè mai potranno avere, quelli delle altre scienze per la continua variabilità del mondo

---

schiarimenti cfr. anche: PEANO in *Mathesis* (giugno 1910) ed anche su questo il libro classico del BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, (Paris, 1912), Ch. IV.

(1) È precisamente contradditoria sotto ogni punto di vista la si voglia considerare che non sia quello idealistico dell'azione sintetizzatrice del nostro pensiero.

(2) Non dimentichiamo l'altra (cfr. questo lavoro, pag. 11) celebre definizione di B. Russel della matematica: « la classe di tutte le proposizioni della forma: *P* implica *Q* (*P, Q*) ». (*The Principles of Mathematics*).

empirico su cui devono basarsi; e tutto ciò aumenta direttamente la nostra conoscenza e perciò essa matematica presenta quel carattere che hanno le scienze e che non ha la logica. Ma questa meravigliosa fusione di risultati dipende pur sempre dalla sua particolare posizione di poter svolgere la sua attività in un mondo in gran parte ipotetico, in gran parte da essa stessa creato e non su entità astratte o su fenomeni già dati alla nostra osservazione, e precisamente: lo studio riflesso sulla nostra stessa attività del pensiero, funzione della logica, o sui fattori forniti alla nostra sensibilità, com'è nelle scienze empiriche. Se noi non accettiamo il punto di partenza, cade tutta la grandiosa conquista matematica da Euclide ai giorni nostri (1).

Il privilegio della posizione della matematica rispetto alle esigenze della nostra intelligenza è quindi del tutto apparente. Ciò che forma la sua grande forza rispetto a un sapere relativo, segna pure la sua definitiva condanna rispetto al sapere assoluto, che esige sì l'immutabilità formale della logica e l'universalità e la necessità del giudizio, ma che pretende di trovare immutabilità di procedimento e universalità e necessità di conoscenza direttamente dalla realtà com'essa veramente è, e non come noi vogliamo che sia.

Ciò non pertanto la matematica ha indubbiamente una speciale importanza in ogni teoria della conoscenza. Pure riservandoci di determinare più

---

(1) La questione fondamentale al riguardo sta appunto nel vedere se noi possiamo fare a meno di accettare tali punti di partenza; questione che svolgeremo trattando del punto di vista della moderna metageometria e dei principii sintetici « a priori » di Kant.

nettamente nella terza parte di questo studio la sua particolare funzione rispetto al problema conoscitivo noi possiamo osservare fin d'ora che la sua immutabilità concettuale e la necessità e universalità dei suoi giudizi non è determinata esclusivamente, e forse nemmeno prevalentemente, dalla parziale convenzionalità che noi abbiamo creduto di trovare nelle sue definizioni. Tali prerogative sono proprie, rigorosamente parlando, soltanto della logica (1), ma esse si possono a buon diritto estendere alla matematica, *anche* perchè questa è la scienza più vicina alla logica, sia per somiglianza (2) di procedimento, sia per essere, come questa, per nulla affatto influenzata da circostanze ambientali.

Ove si volesse riassumere le considerazioni fatte a proposito dei rapporti fra logica e matematica rispetto alla conoscenza, potremo così concludere:

I) la matematica, come le altre scienze aumenta il nostro patrimonio conoscitivo: la logica, no;

II) la matematica presenta i caratteri dell'immutabilità del procedimento logico e dell'universalità e necessità delle conoscenze passate sotto il controllo formale della logica: le altre scienze, no;

III) il valore della matematica è in parte relativo perchè fondato su presupposti (definizioni, assiomi e postulati) che la logica non può sempre incondizionatamente accettare.

Un quarto carettere di tali relazioni logico-matematiche rispetto alla conoscenza è quello del

(1) Non già del sapere logico, razionale, ma della logica formale p. d. (contraddizione ed identità), cfr. questo libro, § 2, pag. 23 (nota 2ª).

(2) Semplice somiglianza, come si è veduto.

vertere le proposizioni matematiche unicamente sulla nostra conoscenza sensibile, ma tale osservazione non possiamo qui porre come conclusiva data la necessità di esaminare prima, il presupposto essenziale alle scienze matematiche, vogliamo dire la forma della conoscenza sensibile, ossia il tempo (aritmetica) e lo spazio (geometria).

Per quanto riguarda il *procedimento* cui si attengono le diverse scienze — e segnatamente la matematica — rispetto sempre naturalmente alla sola conoscenza sensibile e la loro attinenza con la funzione specifica della logica in questo campo, esso potrebbe essere schematicamente rappresentato nel modo seguente:

logica
- matematica (procede normalmente dall'*intuizione*)
  - *principii* « a priori » (definizioni, assiomi, postulati)
  - *dimostrazione* (teoremi)
- altre scienze (procedono normalmente dall'*esperienza:* in alcuni casi dalla intuizione geniale sempre però comprovata da una susseguente esperienza)

in cui, per spiegarmi meglio onde non si fraintenda, si deve leggere: la logica influenzare tutto il nostro procedimento conoscitivo sia specificatamente nella matematica (sopra tutto nelle verità derivate per dimostrazione) sia in tutte le altre indagini della nostra intelligenza, ove le indagini stesse pretendano di essere « scienze » nel preciso significato della parola, di rispondere cioè esaurientemente ai nostri dubbi sul valore delle loro affermazioni e negazioni.

§ 9. **Il procedimento ipotetico della matematica.** — Da quanto precede possiamo così dedurre che quello che il Leibniz sostiene a proposito della necessità dei postulati e della natura di questi, pure essendo, a nostro modo di vedere, profondamente vero, non può che parzialmente soddisfare il nostro bisogno di conoscere. Certo il Leibniz non considera i principii matematici come arbitrarii nè per quanto riguarda le definizioni, nè per quanto riguarda i postulati. È anzi appunto il Leibniz stesso che ha posto in luce come, ove la geometria ci desse la definizione di figure impossibili (1), questa sarebbe incompatibile con il tutto geometrico e prima o poi ne risulterebbe l'assurdità; quindi non si può ammettere l'arbitrio nella definizione.

Così è appunto il Leibniz che si preoccupa di replicare ripetutamente a Locke che gli assiomi matematici non sono affatto dei principii immaginarii, delle « supposizioni arbitrarie di cui si sia misconosciuta la verità » (2).

Ma non possiamo però dimenticare che è lo stesso Leibniz che sostiene nelle « Primae Veritates » (3) che, le prime verità appunto, sono soltanto quelle « quae idem se ipso enuntiant aut oppositum de ipso opposito negant. Ut *A* est *A*,

(1) L'Enriques (*op. cit.*, II, pag. 90) riporta al riguardo l'esempio del decaedro regolare, esempio d'altronde addotto dallo stesso Leibniz. Ragionando attorno a tale figura impossibile si riuscirebbe certo « a mettere in evidenza le contraddizioni che il suo concetto implicitamente racchiude ».

(2) Leibniz, *Nouveaux Essais*, IV, pag. 12.

(3) Cfr. L. Couturat, *Opuscules et Fragments inédits de Leibniz*, (1903), pag. 518.

vel *A* non est non *A* (1). Si verum est *A* esse *B*, falsum est *A* non esse *B* vel *A* esse non *B* »: nè possiamo dimenticare che egli vedesse la necessità di tali assiomi (2) non già nell'indimostrabilità ed evidenza di essi come verità insindacabili, bensì nella loro utilità onde poter proseguire, in un senso cioè che — sotto questo aspetto particolare — possiamo riconnettere con il criterio di pratica utilità e non altro che l'Hobbes riconosceva ai principii fondamentali della matematica. Dal punto di vista dell'insoddisfazione della nostra esigenza conoscitiva le considerazioni introdotte dal Leibniz sull'utilità di tale procedimento assiomatico, mi ricordano in certo qual modo come il Mach si sbriga nei suoi « Preliminari antimetafisici » della essenza dell'*io* (3) che egli considera come pura e semplice convenzione utile a più facilmente intendersi e a tirare innanzi, riconoscendo tutto al più una maggiore fusione nel gruppo di elementi che costituiscono l'*io* in confronto « con altri gruppi dello stesso genere ». L'analogia consiste naturalmente — è ovvio — nel solo punto di vista, dato che il Mach non si limita soltanto a proclamare il valore di un'ipotesi, anche se puramente convenzionale, sotto il solo suo aspetto utilitario, il che potrebbe rivelarci, caso mai, l'estrema conseguenza di volersi a ogni costo mantenere fedele alla sua dottrina dell'*economia del pensiero*; ma incorre nel gravissimo errore di considerare come

---

(1) Cfr. Kant, *Prolegomeni* (tr. it.), § 2, *b*): « Il principio fondamentale dei giudizi analitici è il principio di contraddizione » (ogni corpo è esteso = nessun corpo è inesteso).

(2) Leibniz, *Nouv. Ess.*, IV, 7, 12.

(3) Mach, *Analisi delle sensazioni* (tr. it.), cap. I.

supposizione ciò che possiamo ritenere per la nostra più assoluta certezza: l'*io*, soltanto perchè essa non può essere determinata da ricerche semplicemente positive.

Ma l'inconveniente razionale dell'ammissione utilitaria del presupposto del punto di partenza onde potere più speditamente, e, sia pure, più efficacemente proseguire, è simile in entrambi i casi: ne differisce soltanto d'intensità.

Senza dubbio tale concezione del Mach avrebbe spaventato il Leibniz, paziente indagatore e ardito metafisico, e gli avrebbe dato a riflettere come lo esempio illustre della matematica, potesse estendersi con troppa tranquillità persino alla base essenziale di qualunque nostra possibilità di conoscere. Ma dalle sue considerazioni del libro IV dei « Nouveaux Essais » a favore del mondo ipotetico della matematica — sia nel capitolo 7° dedicato alle « massime ed assiomi », sia nel capitolo 12° riguardante « i mezzi per aumentare la nostra conoscenza » — sorge naturale l'osservazione che tutte le sue argomentazioni hanno valore soltanto di giustificazione esplicativa provvisoria: e conferma ne sia la sua diligenza a mostrare come sia opera lodevole il tentare di ridurre a un minimo indispensabile tali principii fondamentali « a priori » della matematica, e a ricordarci come già dai tempi antichissimi molto si sia tentato in questo campo. Anche se la critica moderna non può accettare che già con Talete di Mileto, il primo dei matematici greci, colui che predisse l'eclisse solare del 28 maggio 585, si sia tentato dimostrare proposizioni poi supposte da Euclide come evidenti, come Liebniz sembra credere sulla testimonianza

di Proclo (1), è certo però che fra gli stessi contemporanei di Euclide, figurano già questi tentativi continuati poi con intensità sempre maggiore dagli immediati successori (Apollonio) (2) ininterrottamente sino a noi. Le argomentazioni del Leibniz mirano cioè soltanto a convincerci che tale mondo ipotetico della matematica (ipotetico non significa arbitrario) (3) è stato della più grande utilità non soltanto limitatamente all'aritmetica e alla geometria, ma anche a tutte quelle altre scienze, che più o meno direttamente su di esse si appoggiano, in quanto che se Euclide non si fosse basato su alcune di queste verità intuitive prese come postulati, se Archimede non ne avesse introdotte altre e così via, noi non avremmo ancora ai giorni nostri una geometria, non avremmo quel meraviglioso edificio che partendo da pochi principii arriva « alla scoperta e alla dimostrazione di verità che sembravano dapprima al di sopra della capacità umana ».

---

(1) *Commentarii in primum Euclidis elementorum libri* (Leipzig, Teubner, 1873).

(2) Cfr. il cap. 7° del libro IV dei *Nouveaux Essais,* nonchè, per quanto riguarda Apollonio, il libro citato del Couturat, *Op. et Frag. in. de Leibniz,* pag. 181-182: « Euclide avoit raison, mais Apollone en avoit encore davantage ». Così pure nella « Demonstratio axiomatum Euclidis », pag. 539 dell'opera medesima.

(3) Anche i matematici dei giorni nostri insistono su tale distinzione, non esclusa la corrente decisamente convenzionalista del Poincaré e seguaci. Cfr. ad es. Rougier, *La philosophie géométrique de Henri Poincaré,* pag. 129: « Cette convention (il V postulato di Euclide) bien que facultative, n'est toutefois pas *arbitraire* ». Nello stesso senso insiste ripetutamente il Brunschwicg (« Les Etapes de la philosophie mathématique ») in quanto « libero non significa arbitrario » (pag. 541) e così un'infinità d'altri.

Tutto ciò è, almeno a mio modo di vedere, perfettamente esatto, ma noi da tali argomentazioni usciamo solo in parte soddisfatti. Io non guardo se sia stato più *utile* che gli antichi sapienti invece di fermarsi alla possibilità o non della dimostrazione di un principio preso come postulato, abbiano proseguito con sicurezza e tranquillità: dell' utilità del procedimento medesimo io non mi curo. Ma mi curo però di osservare come i miei dubbi sul valore delle proposizioni originarie siano rimasti intatti malgrado lo sviluppo grandioso che da tutti è riconosciuto alla matematica, e che malgrado gli allettamenti di un tale metodo di sapere, la ragione resterà disperatamente fedele al suo dubbio metafisico su cui non potrà sorvolare nemmeno provvisoriamente, supponendolo risolto onde poter arrivare a un tutto splendidamente organico ed omogeneo che impressiona, ma non soddisfa. Lo stesso famoso dubbio cartesiano non avrebbe avuto alcuna ragione di essere, se Descartes, malgrado il suo geniale tentativo geomemetrico, fosse stato veramente un matematico e non un metafisico.

È perciò legittima la questione che il nostro pensiero non può fare a meno di rivolgersi: posso io sicuramente credere in verità che abbiano tale origine? Certo, si potrebbe rispondere, e per due ragioni: innanzi tutto perchè è necessario che qualunque indagine abbia un punto di partenza su cui basarsi onde non perdersi in cervellotiche e inconcludenti divagazioni all'infinito; inoltre perchè tali principii fondamentali sono in noi, in certo qual modo innati, e alla loro evidenza non possiamo sottrarci.

La prima di queste ragioni non può essere in

linea di massima seriamente contestata da alcuno: sono troppo note le elucubrazioni tanto ingegnose e sottili quanto vuote e inconsistenti della ricerca di una causa prima in cui si sono sbizzarriti logici e metafisici medievali, perchè non si debba ritenere necessario il partire da principii nettamente posti e su di essi costruire.

Veniamo così ad affacciarci naturalmente alla seconda eventuale risposta al problema postoci inerente alla *scelta* dei principii fondamentali medesimi e al loro *numero*. La scelta dovrà essere determinata esclusivamente dall'inconcepibilità del contrario, basandoci ancora proprio sul vieto criterio dell'evidenza ormai quasi universalmente ripudiato dai matematici. Conseguentemente il numero di essi dovrà essere ridotto al minimo, per la semplicissima ragione che ben poche sono le verità il cui contrario è per noi impensabile. D'altra parte, indipendentemente però dal criterio dell'evidenza, la necessità di ridurre a un minimo indispensabile i principii presi come presupposti è ammessa dagli stessi matematici.

Il problema inerente al criterio che deve presiedere alla formazione dei principii medesimi sarà il tema delle considerazioni che passiamo a svolgere. In primo luogo, a maggiore esplicazione di quanto si è già sino ad ora superficialmente trattato, nel limitare il valore dei giudizi matematici — qualunque sia per essere il grado di perfezionamento che essa potrà eventualmente raggiungere in avvenire — al solo campo della conoscenza sensibile, ossia soltanto relativamente ad una realtà quantitativamente inferiore a quella essenzialmente concettuale del pensiero puro.

In secondo luogo — e questa sarà la funzione specifica delle considerazioni medesime — a mettere in luce se, anche limitatamante a tale campo conoscitivo, i giudizi matematici abbiano quel valore universale e necessario che Kant attribuisce loro, e in quali rapporti tale valore sia con la metageometria contemporanea.

Capitolo III.

Il valore del giudizio matematico.

§ 10. **Il valore universale e necessario del giudizio matematico.** — Ma un'obbiezione al concetto di un mondo ipotetico della matematica, che Leibniz implicitamente e parzialmente riconosce ammettendone l'utilità, la necessità anzi onde poter proseguire, la troviamo nella concezione kantiana dei principii sintetici a priori, principii sintetici di cui abbiamo riconosciuta l'estrema importanza, e su cui ci siamo basati, per dimostrare l'origine non essenzialmente empirica di ogni nostra conoscenza, in quanto i principii stessi sono già in noi precedenti qualsiasi sensazione, non soltanto, ma in certo qual modo influendo sulle sensazioni medesime. Abbiamo anzi osservato come questo sia, dal punto di vista idealistico della teoria della conoscenza, l'argomentazione su cui si deve basarsi per combattere l'empirismo in tutte le sue forme e per non cadere nello scetticismo, cui dovrebbe logicamente giungere qualunque pensiero che si basi essenzialmente sul dato empirico per arrivare alla legge scientifica. L'obbiezione particolare che nel caso nostro (della matematica-logica) si potrebbe dedurre dalla constatazione generale dell'esistenza di tali principii sintetici a priori nella matematica,

sarebbe questa: quelle definizioni e quegli assiomi su cui il matematico costruisce man mano i proprii teoremi non sono già in noi in virtù di un presupposto particolare a detta scienza, ma sono vere e proprie verità che esisterebbero indipendentemente dall'esistenza della matematica. Cioè se Euclide non fosse mai esistito ciò non pertanto non sarebbe mutata la definizione del triangolo, ciò non pertanto non perderebbe di valore l'assioma, ad es., che aggiungendo uguali quantità a quantità uguali se ne otterranno di nuovo quantità uguali, e così via. Possiamo senz'altro osservare che anche ove ciò sia o non incondizionatamente vero, nulla verrebbe a risentirne l'affermazione fatta che la matematica parte da intuizioni e procede per un metodo di analogia, di sostituzione che molto spesso non ha il carattere logico, e che appunto perchè tale non può rispondere alle esigenze del nostro pensiero, tendente alla conoscenza assoluta. Per ciò potremmo pur sempre considerare la visione matematica, come una visione indubbiamente sintetica e concettuale — per quanto concettuale in modo relativo in quanto ha pur sempre bisogno di una rappresentazione sensibile determinata — che offre al filosofo la possibilità di mostrare come seguendo un procedimento rigorosamente esatto e non empirico nelle sue linee essenziali, si possa arrivare a meravigliosi risultati; ma risultati che non possono in alcun modo trascendere la nostra sensibilità.

La matematica in questo modo considerata può ricordarci, contrariamente a ogni scienza (altra ragione per cui essa deve essere separatamente trattata), la visione estetica dell'opera d'arte (1), ma

(1) Cfr. Cap. I, § 3, pag. 28-29.

ciò non pertanto essa, per la sua necessità di lavorare, non già sul concetto puro, ma su di una rappresentazione gradatamente sempre più complessa di esso (in geometria dal punto al solido), come l'arte per la preponderanza del lato sensibile, rappresenta pur sempre un mondo che da un punto di vista logico non può rispondere alle esigenze del metafisico. Pure accettando i principii della matematica come incondizionatamente veri in quanto insiti nel nostro pensiero stesso, il suo modo sarebbe pur sempre, anche ritenendo con il Fouillée che « le verità metafisiche avendo la loro espressione, per quanto incompleta, nei fatti attualmente conosciuti dall'esperienza, questa espressione può essere studiata e interpretata per mezzo di un metodo, che, come abbiamo veduto, non è senza qualche analogia con quello del calcolo infinitesimale » (1), sarebbe pur sempre, dicevamo, un mondo non essenzialmente concettuale in quanto agisce su di una determinata figura specifica, come si vede molto chiaramente nella geometria. Questa non costruisce già sul concetto di triangolo genericamente preso, ma sul tale determinato triangolo, particolarità questa che porta all'esigenza della rappresentazione grafica della figura che si deve esaminare.

Tale necessità di rappresentazione grafica, deve qui intendersi nello stesso modo nel quale la intende Kant nella « Critica » (2). Se diamo ad un filosofo il concetto di triangolo e gli diciamo di

---

(1) A. Fouillée, *L'avenir de la méth. fondée sur l'ex.* (1889), pag. 295.

(2) *Critica* (ed. cit.), vol. II, pag. 214 (Metodologia trascendentale). Metti in relazione tale brano con quello citato nel presente lavoro a pag. 82.

trovare secondo la sua maniera (1) il rapporto della somma dei suoi angoli con l'angolo retto, egli non verrà mai a capo di nulla. Potrà esaminare finchè vuole il concetto di retta, il concetto di angolo, il concetto del numero tre, « non troverà mai altre proprietà che non siano contenute in questi concetti ». Ma, provate un po' a sottoporre a un matematico tale problema, e vedrete quanto differente sarà il suo modo di trattarlo. « Innanzi tutto egli comincerà col costruire un triangolo. Poi, sapendo che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti, prolungherà un lato del suo triangolo, ecc. », nel modo noto. Ora, noi sappiamo, pure dalla « Critica » (2), che cosa intenda Kant per costruzione di una figura geometrica, significa cioè: « rappresentare l'oggetto corrispondente a mezzo dell'immaginazione nell'intuizione pura o anche in modo conforme a questa, sulla carta, nell'intuizione empirica », bene inteso in entrambi i casi in modo del tutto indipendente da qualunque criterio sperimentale. Oggi infatti non si può più ritenere seriamente che si possa supporre che sono le figure che danno la prova nella geometria il cui errore Leibniz si preoccupava di mettere in chiaro (3).

Soltanto per un processo non sempre lecito di *sostituzione analogica* (4) noi possiamo dal caso

(1) Ossia secondo la maniera rigorosamente razionale.

(2) Ed. cit., vol. II, pag. 212.

(3) *Nouveaux Essais*, v. alla fine del Cap. I.

(4) Tale processo di *sostituzione* non figura, è vero, a rigor di termini nel calcolo infinitesimale, ma questo esula già in certo qual modo dal rigoroso calcolo aritmetico che non può essere considerato nella sua purezza che nel numero intero: e ciò sia detto a meno di considerare lo stesso calcolo infinitesimale quasi come aritmetizzato riducendo l'Infinito a un sistema finito di disuguaglianza dei numeri interi.

singolo del triangolo che si sta esaminando, risalire all'enunciazione generica da cui siamo partiti ed estenderlo a tutte quelle figure che rispondono ai requisiti della definizione di triangolo. Ciò è nella geometria in modo forse più palese, ma ciò figura anche nell'aritmetica, nell'operazione più semplice di essa: nell'addizione.

Sostenendo che:

$$2 + 2 = 4$$

noi, prescindendo dalle considerazioni kantiane che ci dimostrano che questo concetto di 4 non ci è dato effettivamente che basandoci su di un giudizio sintetico « a priori », che nel caso che stiamo esaminando — processo sostitutivo nella matematica — non ci interessa, noi possiamo arrivare alla somma soltanto dimostrando in antecedenza che:

$$1 + 1 = 2; \quad 2 + 1 = 3; \quad 3 + 1 = 4$$

in cui c'è d'altronde il processo sostitutivo.

Ma appunto basandoci su tale esempio possiamo subito osservare che la dimostrazione riportata, da un punto di vista logico, è da considerarsi come dubbia: è infatti più un chiarimento, una « verification », come nota acutamente il Poincaré in un caso simile per quanto dettato da altri motivi. Ove poi noi volessimo generalizzare, compito di ogni ricerca che voglia avere carattere scientifico e compito precipuo della matematica, sostituendo i numeri con lettere, noi dovremmo per arrivare alla dimostrazione — o meglio *verifica* — che:

$$x + n = y$$

aver trovato prima, *sempre*, il valore di:

$$x + (n - 1)$$

ciò che in pratica non si verifica.

Basta ricordare il teorema sui numeri primi dell'illustre Fermat, quello stesso Fermat che Pascal considerava come il più gran geometra di Europa. Egli si era proposto di cercare una formula che « non contenendo che dei numeri primi, desse direttamente un numero primo maggiore di qualunque numero assegnabile » (1). Il Fermat credette di poter stabilire che tale numero primo poteva essere dato dal 2 elevato a potenza (che doveva essa pure essere una potenza del 2) più l'unità: e infatti Eulero mostrò che ciò cessa di aver luogo per la 32ª potenza del 2 (4.294.967.297), numero praticamente più che sufficiente, ma che logicamente non può affatto autorizzare la sostituzione letterale che dovrebbe non conoscere limiti: nello stesso modo si osserva in Leibniz (2) la più che sufficienza pratica di fermarsi al nonilione come limite dell'infinito numerico. Il Fermat fu inoltre il primo ad ammettere che la sua non era una « dimostrazione » (3).

Così ad es. ove si sia mostrato che:

$$5 + 7 = 12$$
$$7 + 5 = 12$$
$$(5 + 7) = (7 + 5)$$

in matematica veniamo senz'altro alla conclusione che

$$x + y = y + x$$

agendo puramente per sostituzione. Questa ha indubbiamente incalcolabile efficacia scientifica, nè

(1) P. S. Laplace, *Essai philosophique sur les probalités*, II, pag. 86 segg. (Paris, 1921).

(2) *Nouv. Essais*, II, 16, pag. 113 (Flammarion ed.).

(3) Anche degli studi del Fermat fu fatta un'edizione completa: *Oeuvres de Fermat*, Tannery-Henry ed.

da un punto di vista logico può essere considerata come puro e semplice arbitrio, ma certo non possiamo vedere in essa quello scrupolo che una mente prettamente logica potrebbe pretendere. Del tutto arbitrario il procedimento sostitutivo non è, in quanto negli esempii citati vi è indubbiamente dell'analisi nel verificare perchè $2 + 2 = 4$, e della sintesi (v. Kant) nel numero 4 da noi introdotto; ma certo il lato logico di tale procedimento è indizio di una logica tutta particolare della matematica e che non potrebbe in alcun modo estendersi al campo dell'indagine puramente concettuale della metafisica.

§ 11. **Il valore convenzionale e relativo del giudizio matematico** (1). — Ma ciò non basta per rispondere esaurientemente alla obbiezione che, basandoci sui principii sintetici « a priori » della matematica, secondo Kant, si potrebbe rivolgerci, in quanto che tale mondo della matematica, anche se non atto a soddisfare la nostra tendenza all'assoluto metafisico — e in ciò, come si vede, non ci si allontanerebbe affatto da Kant, in quanto anche

---

(1) Cenni bibliografici: RUSSELL, *Essai sur les fondements de la géométrie* (tr. fr., Paris, Gauthier-Villars, 1901); CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles, 1837); BELTRAMI, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* (1865); BARBARIN, *La géométrie non euclidienne* (Paris, Gauthier-Villars); D. M. Y. SOMMERVILLE, *The Elements of now-euclidean geometrie* (London, Bellaud Sons).

Dello stesso A. di somma utilità è la: *Bibliography of non-euclidean geometrie, including the theorie of parallels, the foundations of geometry and space of* n *dimensions* (London, Harrison and Sons); MAC-LEOD, *Introduction à la géométrie non euclidienne* (Paris, Hermann, 1922).

per lui le verità matematiche hanno valore soltanto per la realtà sensibile e non per la vera realtà, per la cosa in sè — sarebbe pur sempre un mondo non ipotetico come viceversa abbiamo più sopra sostenuto. Vediamo un po' da vicino la questione che è di tale importanza da meritare il più attento esame.

I giudizii sintetici « a priori » di Kant sarebbero rimasti, nel campo della matematica, incondizionatamente dominatori, se non fossero sorti nel seno stesso della matematica, obbiezioni sulla loro validità universale e necessaria. Possiamo dire subito come l'importanza di questo recentissimo indirizzo matematico — la metageometria — sia stato esagerato non tanto dalla ricerca spassionatamente scientifica dei suoi principali esponenti, quanto dal carattere polemico di alcuni studii che senz'altro credettero di poter ravvisare in essa la tomba della dottrina kantiana dell'apriorità. Ciò è errato, e su ciò abbiamo troppo a lungo insistito per tornarci sopra: l'origine delle verità matematiche non può essere che aprioristica, nè la metageometria pretende di sostenere il contrario. Nè tutto in essa è nuovo di zecca. È riconosciuto che lo stesso Kant già avesse preveduto (1) la possibilità di future infinite geometrie ammissibili in astratto; forse nello stesso Aristotele (2) si riscontrano allusioni che ci potrebbero far credere all'esistenza di pensatori che fin d'allora mettessero in dubbio il valore complessivo dei principii scientifici e logici, senza esclusione nemmeno di quelli matematici.

---

(1) Cfr. al riguardo il *Commento* ai *Prolegomeni* del Martinetti, pag. 240, riferendosi ai *Gedanken von der wahren Scätzung der lebendigen Kräfte*, scritto da Kant a 22 anni.

(2) Cfr. F. Enriques, *Il concetto della logica dimostrativa secondo Aristotele*, in *Riv. di Filosofia*, gennaio 1918.

Malgrado queste numerose e antichissime traccie, la metageometria soltanto ai giorni nostri è venuta assumendo la sua piena espressione critica (1). E ciò non tanto per il naturale progresso proprio di ogni scienza e quindi anche della matematica, ma per una particolare evoluzione del nostro pensiero a tendere sempre più verso la logica più rigorosa. C'è nella nostra volontà conoscitiva di questi ultimi tempi una sempre più intensa esigenza che la porta ad uno scrupolo sempre maggiore nel controllare qualsiasi nozione prima di essere ammessa: verità che gli antichi accettavano senz'altro, sembrano oggi da esaminarsi con riserbo. L'intuizione va cioè man mano diminuendo d'importanza, non tanto nell'acquisizione di nuove nozioni, quanto nell'accettazione incondizionata di esse.

Non so se lo sviluppo della logica considerata come scienza a sè stante, sia più manifesto dello sviluppo di altre discipline, ma credo si possa con sicurezza affermare che anche se le inutili sottigliezze dei teorici della logica, non hanno raggiunto un particolare miglioramento d'espressione, questo può senza dubbio verificarsi nella sempre più riguardosa prudenza che lo studioso è andato acquistando e che lo fa rimanere dubbioso prima di poter dichiarare: sì questo è vero.

Sotto questo punto di vista sembra che il pensiero moderno si differenzi dall'antico in quanto alla affermazione di « evidenza » di questo, risponde

---

(1) V. le opere fondamentali dei suoi fondatori: B. RIEMANN, *Ouvres mathématiques* (Paris, 1898), tr. fr. de L. Laugel; LOBATCHEFSKI, *Pangéométrie ou théorie générale des parallèles suivie des opinions de D'Alembert sur le même sujet et d'une discussion sur la ligne droite entre Fourier et Monge* (tr. fr., Paris, Gauthier-Villars).

con maggior calma: adagio, prima ragioniamo, vediamo se tutte le strade sono state tentate e se nulla possiamo aggiungere a quelle già battute; cerchiamo di vedere, se non altro, se non possiamo ammettere in alcun caso l'ipotesi contraria.

In questa posizione rispettiva dei due pensieri il moderno ha naturalmente una grande prevalenza, non soltanto iniziale, sull'altro. Ciò per due ragioni: in primo luogo in quanto anche se l'ipotesi contraria non può essere sostenibile, non per questo possiamo contare con sicurezza su quella primiera, tranne nel caso che l'ipotesi in questione sia veramente dilemmatica, il che non sempre è: l'idealismo trascendentale ci offre in filosofia un esempio chiarissimo di tale *supposizione* dilemmatica. Segnatamente Fichte e Schelling credettero di poter vedere soltanto una via alla soluzione della cosa in sè: far derivare il mondo esterno dal soggetto; ciò che li portò molto, troppo lontani nelle conseguenze.

In secondo luogo, in quanto il pensiero moderno può basarsi su quell'esperienza millenaria che ha potuto sempre maggiormente porre in luce che altre verità intuitive ritenute per secoli evidenti e indimostrabili, sono state col tempo dimostrate o, peggio, sono col tempo cadute.

Su tali più solide basi la metageometria è venuta a formare, oggi, una nuova scienza, che, in quanto « scienza », possiamo ancora considerare agli inizii e in cui figurano perciò gravi lacune che non saranno facili a colmare; ma essa ha pur sempre portato notevole contributo alla questione della apriorità del principio e del valore del giudizio matematico fornendo a questa nuovi elementi e fissandone i limiti.

La metageometria si limita soltanto a sostenere

il carattere puramente convenzionale del mondo geometrico euclideo: la geometria euclidea è stata da noi « scelta » unicamente perchè essa è per noi la più vantaggiosa, ed anche — la metageometria lo riconosce — la più vicina alla nostra naturale intuizione spaziale. Il Poincaré sostiene nettamente che la geometria euclidea è e sarà sempre « la plus commode », intendendo appunto con tale espressione di stabilire che essa è la più vicina alla nostra diretta sensibilità spaziale. Essa infatti è la più semplice non già soltanto in seguito alla nostra abitudine « ou de je ne sais quelle intuition directe de l'espace euclidien », ma anche in se stessa considerata, nello stesso modo e per le stesse ragioni per le quali un polinomio di 1° grado è più semplice di un polinomio di 2° grado, e così via. Inoltre, continua il Poincaré, la geometria euclidea « si accorda assai bene con le proprietà dei solidi naturali » di cui ci serviamo per fare i nostri strumenti di misura (1).

La metageometria si guarda bene, così stando le cose, dall'affermare che per questo i giudizii matematici verrebbero ad avere un'origine sperimentale, empirica. La indipendenza della matematica dalla esperienza viene anzi ripetutamente affermata, esplicitamente o non, da tutti i migliori rappresentanti di tale indirizzo geometrico-critico; ma anche ove l'affermazione categorica mancasse, essa sarebbe pur sempre la conseguenza indispensabile della tesi metageometrica del non poter essere considerato lo spazio come fattore sperimentale, come vedremo trattando della terza dimensione.

---

(1) H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, pag. 67.

La metageometria segna così un nuovo elemento a favore della dottrina idealistica: più specificatamente, per quanto riguarda il punto fondamentale che interessa all'idealismo in questo argomento, il punto in cui Kant si solleva decisamente sull'empirismo di Hume, possiamo dire che essa segna una specie di prova, di controllo a favore di Kant precisamente contro Hume. Si sa come Kant rimproveri a Hume di aver attribuito al giudizio matematico un carattere esclusivamente analitico; ma ciò — più che da un'errata interpretazione di Kant al riguardo — dipende dall'aver Kant voluto attribuire a Hume la propria terminologia. Hume pone infatti la matematica nella conoscenza dimostrativa (copia d'impressioni), in quella conoscenza cioè che è basata nella filosofia dell'empirico scozzese sul principio di « somiglianza e contrasto ». Questo ci dà, sempre secondo Hume, una certa sicurezza conoscitiva, ma questa sicurezza è quanto mai modesta: si limita in fondo a dirci che noi possiamo venire a sapere se una cosa è uguale o differente da un'altra. Ma tale principio di somiglianza e contrasto è in fondo il vecchio principio di contraddizione: ora, il principio di contraddizione è da Kant posto a base dei giudizii analitici: esso figura, è vero, anche nei giudizii sintetici; ma allora non è più solo; vi si trova con il principio di causa, ecc. Escluso il principio di causa da Hume, o meglio ridotto esso ad una pura e semplice successione temporale, ne viene che la conoscenza dimostrativa, e quindi la matematica che è posta in essa, poggia *soltanto* sul principio di somiglianza e contrasto. Quindi secondo la terminologia kantiana i giudizii di essa non potevano essere che

analitici nella dottrina di Hume (1). Questi in ogni modo, indipendentemente dal carattere sintetico o analitico delle proporzioni matematiche, venne implicitamente a porre sull'esperienza, il fondamento delle proporzioni medesime; concezione che possiamo d'altra parte trovare in diversi altri pensatori, come ad es. in Wolff e discepoli.

Soltanto, viene molto naturale osservare a questo proposito come, riconoscendo l'apriorità dei principii della matematica, ma attribuendo a tale apriorità valore puramente e semplicemente convenzionale, si viene ad ammettere il punto di partenza della dottrina kantiana, ma a negarne le conseguenze, a negare cioè che i principii stessi abbiano valore universale e necessario. In altre parole la natura delle scienze matematiche viene ad essere notevolmente modificata non già nella natura non sperimentale dei suoi punti di partenza, ma nelle conclusioni.

Intendiamoci bene: Kant non si è mai stancato di ripetere, nè diversamente poteva essere dato il suo realismo gnoseologico, che le verità matematiche non potevano riguardare che la realtà sensibile. Ove a Kant si fosse obbiettato che con

(1) Non sono quindi in tutto del parere di Martinetti che trova in Kant un'errata interpretazione di Hume al riguardo (cfr. il suo *Commento* ai *Prolegomeni*, pag. 215). Non è che Kant attribuisca a Hume di avere scritto in qualche parte che il metodo matematico consiste « in un'analisi pura e semplice di concetti », ma soltanto per l'identificazione del principio humiano della « somiglianza e contrasto » con il principio di contraddizione, e per aver posto esclusivamente questo stesso principio (escludendone la causalità) a base di quella conoscenza dimostrativa della quale fa parte, nella dottrina di Hume, la matematica, la quale veniva così di conseguenza ad esser, in linguaggio kantiano, analitica.

modificazioni adatte del mondo ambiente — in quelle diverse ipotesi che si potrebbero prospettare in merito e che sono indubbiamente molto numerose — il soggetto conoscente sarebbe addivenuto ad un'intuizione spaziale in cui la geometria euclidea non sarebbe forse stata concepita neppure come ipotesi possibile in astratto, Kant avrebbe con tutta tranquillità potuto rispondere ch'egli si interessava soltanto di questo nostro mondo e che sarebbe opera da sognatore l'aspirare alla realtà assoluta; ma, egli avrebbe aggiunto, dato questo nostro mondo, i giudizii matematici sono insindacabili ed hanno valore universale e necessario: anche se in avvenire noi potremo arrivare a immaginare non una, ma mille geometrie diverse dalla euclidea, questa soltanto potrà rispondere alle nostre esigenze col darci nozioni tali da permettere la necessità e l'universalità dei nostri giudizii, perchè soltanto l'euclidea può essere la nostra geometria per l'identità della sua con la nostra naturale intuizione dello spazio (1).

L'idealismo più rigoroso posto di fronte a tale questione, non modificherebbe gran che la risposta di Kant. Per conto mio, ove ritenessi di potere accettare *incondizionatamente* i principii sintetici « a priori » della matematica e quindi la necessità e universalità dei suoi giudizii, credo si potrebbe osservare che, senza dubbio per ragioni differenti da quelle realistiche cui tiene fermo Kant, si dovrebbe arrivare alla stessa conclusione che il

---

(1) Svolgeremo tale argomento particolare più innanzi trattando della III dimensione dello spazio. (Capitolo IV di questo libro).

valore del giudizio matematico (come abbiamo già accennato nel cap. II) non può andare al di là della realtà sensibile, in quanto basato su quelle che sono appunto le forme indispensabili della conoscenza sensibile — tempo e spazio — ma che soltanto limitatamente ad essa hanno ragione di essere. Evidentemente qualunque verità assoluta o che tende all'assoluto non può che prescindere da tutto quanto può avere attinenza col senso e quindi essere del tutto indipendente dal tempo e dallo spazio, risultato che può essere conseguito soltanto basandosi sulla pura forma della razionalità: la logica.

Perciò ove potessi ammettere incondizionatamente la validità dei giudizii sintetici « a priori », verrei alla conclusione che la matematica corrisponde in certo qual modo nella conoscenza sensibile a quello che è la logica nella conoscenza razionale: il *tempo* e lo *spazio*, che sono particolarmente proprii della aritmetica e della geometria, hanno nella conoscenza sensibile la stessa funzione che hanno nella conoscenza razionale la *contraddizione* e l'*identità* (1), che sono particolarmente proprie della logica.

La relazione non deve naturalmente esser presa alla lettera in quanto da quello che precede abbiamo veduto (2) che la logica influenza ogni disciplina e segnatamente la matematica, e che questa ci dà nuove nozioni, cosa che la logica non può mai fare; ma la relazione stessa può a grandi linee essere posta come sopra in modo

(1) Cfr. Cap. I alla fine del § 2, pag. 23.
(2) Cap. II, pag. 91.

quasi proporzionale, e cioè: la matematica sta alla conoscenza sensibile come la logica sta alla conoscenza razionale.

§ 12. **Concezione intermedia del valore del giudizio matematico.** — Tutto ciò però accettando *incondizionatamente* i principii sintetici «a priori» della matematica come fossero parte essenziale, insita nel nostro intelletto; come essi fossero tutti e del tutto estranei a qualunque supposizione provvisoria.

Ora, a tale proposito mi sembra che la via mediana possa considerarsi quella più rispondente alla verità.

Escludendo, come abbiamo accennato e come svolgeremo meglio nel cap. IV, quello che molti vorrebbero (Helmholtz), e cioè che la metageometria abbia senz'altro annullato il valore della dottrina kantiana sull'argomento, non ci pare possa senz'altro concludersi che la dottrina kantiana esca intatta dall'arduo cimento, per lo meno per quanto riguarda i particolari. In ogni modo, indipendentemente dalla metageometria e senza per nulla diminuire l'importanza dei principii matematici, noi abbiamo già veduto come Leibniz considerasse implicitamente ipotetica la posizione di detti principii: come anzi plaudesse a tale metodo come all'unico che partendo da poche premesse, non certo in contraddizione con la nostra ragione anche se non del tutto innate in essa, sia arrivato a quelle mirabili ed efficacissime costruzioni che tutti sanno: qualunque possa essere la nostra opinione sulla matematica dal punto di vista gnoseologico, noi la consideriamo sempre — per dirla col Paulsen, che così interpreta il

pensiero kantiano — « la più sicura e meno oscillante delle scienze » (1).

La metageometria ha portato cioè per il filosofo una rivoluzione molto meno profonda di quello che possa sembrare a prima vista. Ora è precisamente da un punto di vista essenzialmente filosofico che mi pare si potrebbe arrivare a concludere che se è vera l'apriorità del principio e l' intuizionismo del procedimento matematico, è soltanto *parzialmente* vero che i suoi assiomi siano già in noi quasi quali principii innati. È cioè necessario distinguere in tali assiomi: alcuni sono effettivamente insindacabili, generali e di essi noi non possiamo nemmeno concepire il contrario, ed essi sarebbero sempre, indipendentemente dall'ambiente e dalle circostanze. Su tali principii, evidentemente non proprii soltanto dell'apriorità matematica, questa scienza ha avuto pur sempre il merito — e Kant di porlo in rilievo — di appoggiarsi in modo più rigoroso che qualunque altra. Per questa ragione la matematica non può essere posta in dubbio da alcuno e per tale ragione mi è sembrato possibile considerarla come la più alta espressione della conoscenza sensibile.

Ma è bene specificare che cosa s' intenda per evidenza. Per evidente mi sembra non si debba poter intendere altro che una proposizione il cui contrario è inconcepibile, non già nel senso che il Richard (2) vuole attribuire al significato di

(1) F. Paulsen, *Kant* (tr. it.), pag. 131.

(2) *Op. cit.*, pag. 91-92. Lo stesso inconveniente trovasi in Couturat, *Les principes des mathématiques* (in *Revue de Math.*, 1904, pag. 24). Anche per il Couturat la parola « evidente » ha un campo d'azione puramente soggettivo e psicolo-

tale parola in Descartes, in quanto per evidente non mi sembra affatto possa intendersi mai qualche cosa di subbiettivo e che si possa comunque interpretare che Descartes in tal modo l'intenda: un tale non può convincermi che per lui è evidentissimo che $A + B$ sia minore di A. Vi è quindi un' evidenza perfettamente obbiettiva anche nei principii fondamentali. È cioè per tutti noi *inconcepibile* che $A + B$ sia minore di A; ma anche qui dobbiamo andare guardinghi. Non dobbiamo cioè non distinguere, come ci fa osservare il Masci (1), l'inconcepibilità con « altri stadi mentali che potrebbero confondersi con essa, cioè con l'incredibilità e con l'impossibilità di rappresentarsi una qualche cosa ». L'inconcepibile è — mi si passi la parola — *più* che l'incredibile che è soltanto « ciò che è contrario all'esperienza e alle sue leggi ». Così per ripetere l'esempio del Masci, noi non potremmo oggi credere « che un proiettile dall' Inghilterra vada a cadere in Giappone » ma la cosa non è affatto inconcepibile. Aggiungerò per conto mio che da un punto di vista gnoseologico l' inconcepibilità è assoluta, mentre l' incredibilità è relativa.

---

gico e perciò estraneo alla logica. Questa è nel Couturat una semplice allusione buttata là senza importanza, quasi come verità ormai fuori discussione; essa eserciterà invece un' influenza non trascurabile sul successivo svolgersi dei suoi *Principes* in quanto l'*evidenza* del principio « a priori » — evidenza considerata obbiettivamente — non potrà essergli certo di ostacolo nel venire a considerare, più o meno esplicitamente, come convenzionali quei principii fondamentali della matematica, posti come indimostrabili, e dai quali dovranno dedursi le altre verità di tale scienza.

(1) F. Masci, *Pensiero e Conoscenza*, pag. 83 (Torino, 1922).

Meno interessante è per il nostro particolare punto di vista la distinzione fra inconcepibilità e impossibilità di rappresentare per la quale rimandiamo il lettore all'opera citata (pag. 33).

Chiarito così il significato della parola *inconcepibilità* ci sarà facile comprendere come l'evidenza in genere può essere effetto di una dimostrazione e sarà allora la rigorosa deduzione da una verità nota di una nuova verità: di tale evidenza non è questione trattando dei principii fondamentali « a priori »; oppure potrà essere un'evidenza implicita in una proposizione nel suo stesso enunciarsi ed allora dovrà avere la stessa obbiettività e la stessa universalità di qualunque proposizione dimostrata. Sono questi gli assiomi propriamente detti.

Ma vi sono però altri principii posti come indimostrabili dalla matematica, che non sono insiti di per se stessi nel nostro intelletto, che non sono incondizionatamente veri, ma che la matematica ha soltanto ipostasizzato per potere efficacemente proseguire. Questi principii sono stati dalla matematica stessa soltanto *provvisoriamente* posti come indimostrabili, e prova ne sia che in tutti i tempi si possono riscontrare nobili fatiche di matematici — sforzi coronati di frequente da felice risultato — tendenti a dimostrare precedenti proposizioni assunte come evidenti. Lo stesso postulato famoso di Euclide: « per un punto si può far passare una parallela a una retta data e una soltanto », è stato oggetto di queste indagini, e malgrado l'insuccesso di questi tentativi, in questo caso particolare, è pur sempre degno di nota come il bisogno del nostro pensiero di una sempre maggiore sicurezza conoscitiva si sia spinto fino al

presupposto tipico della massima parte delle proposizioni della nostra geometria. È nota la polemica intorno a questo postulato (il quinto) (1) di Euclide.

---

(1) Figura in alcune opere come l'XI assioma. Come tale è considerato ad es. dal Masci, *Pensiero e Conoscenza* (Torino, 1922) a pag. 184. È però ora ritenuto dalla totalità dei matematici come il V postulato. La precisa formulazione di questo postulato non è quella sopra enunciata, ma bensì quella scritta alla fine di questa nota. L'identificazione del V postulato come fu enunciato da Euclide con quello sopra citato (detto propriamente postulato « delle parallele ») risulta evidente mettendo in relazione il V postulato propriamente detto, con la definizione di rette parallele (33ª degli *Elementi*).

Interessante è ciò che dice lo Zeuthen: *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen age* (tr. fr., Paris, 1902), pag. 98: « Les constructions qui doivent servir à composer toutes les autres, d'après ces postulats (quelli di Euclide) sont celles qui on exécute pratiquement avec la règle et le compas, mais on se tromperait cependant si l'on voulait envisager les postulats à cet unique point de vue: entre autres faits, les deux derniers postulats ne seraient point alors à leur vraie place, et c'est la raison même, qui, de très bonne heure déjà, fit commettre à des èditeurs *la faute qui consiste à ranger ces postulats parmi les axiomes* ».

Per meglio intenderci su questo punto e su altri che eventualmente potessero in seguito presentarsi al nostro esame, ricordo qui gli assiomi e i postulati di Euclide (I libro) secondo la classica edizione curata da Heiberg: *Euclidis opera omnia,* (J. L. Heiberg, Leipzig, 1883-1905).

Assiomi: I. Le grandezze uguali ad una stessa grandezza sono uguali fra loro; II. Se a grandezze uguali si aggiungono grandezze uguali, si hanno risultati uguali; III. Se da grandezze uguali si sottraggono grandezze uguali si hanno risultati uguali; IV. Il tutto è maggiore di una sua parte; V. Le grandezze che coincidono sono uguali.

Postulati: I. Fra due punti si può sempre tirare una retta; II. Un segmento di retta si può prolungare all'infinito tanto dall'una quanto dall'altra parte; III. Si può sempre descrivere una circonferenza che passi per un punto dato e avente per

È desso la colonna della geometria euclidea (per lo meno dopo il 29° teorema), ma ne è anche il suo tallone d'Achille. Proclo ci riferisce degli sforzi fatti dagli antichi per la dimostrazione di esso: egli medesimo ce ne dà un saggio personale giudicato d'altronde dai competenti come molto modesto. Lo stesso dicasi degli Arabi. Indipendentemente da ogni altra considerazione, è certo quanto mai significativo il fatto che mai come intorno al postulato delle parallele si siano sbizzarriti i più significativi ingegni matematici di tutti i tempi e che soltanto ai giorni nostri può considerarsi chiusa la polemica intorno alla sua dimostrabilità per le recenti affermazioni della metageometria e per gl' infruttuosi tentativi di dimostrazioni del Gauss (1811) (1) influenzati alla loro volta dalle diligenti indagini che quasi un secolo prima erano state portate a rinnovato lustro — furono in ogni tempo fatti tentativi al riguardo — nelle fatiche di Legendre, di Wallis e di Saccheri (2).

---

centro un punto dato; IV. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro; V. Se una linea retta, che ne taglia altre due, forma dallo stesso lato degli angoli interni la cui somma sia minore di due retti, le due ultime linee citate si taglieranno sui loro prolungamenti dalla parte nella quale la somma degli angoli è inferiore a due retti.

(1) G. B. Halsted, *Gauss and the non euclidean geometry* (in *Science*, 1900).

(2) La bibliografia sul V postulato basterebbe da sola a riempire un volume: accenno soltanto a qualcuna nel caso il lettore voglia approfondire questo argomento particolare: I. H. Lambert, *Theorie der Parallellinien* (in *Magaz. f. d. reine u. angew. Math.*), Leipzig, 1786; Engel und Staeckel, *Theorie der Parallellinien von Euclid his auf Gauss*; D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (III ed., Leipzig, 1909); Loria, *Il pas-*

Per quanto riguarda specificatamente quest'ultimo, l'importanza della sua opera di studioso in merito al postulato delle parallele non potrebbe essere esagerata. In tali tentativi di dimostrazione Young, Vailati, Segre, Enriques vedono nettamente i segni precursori della metageometria moderna. Lo Young non pecca al riguardo di una soverchia precisione cronologica, in quanto l'avere lo scritto più importante del Saccheri veduto la luce il 1733 (l'anno stesso della morte del suo A.) non può evidentemente significare che il gesuita italiano ebbe a svolgere la sua attività di studioso intorno al 1733: a meno che proprio soltanto gli ultimi mesi di sua vita il nostro matematico si sia messo a lavorare; ma di tale particolare non parla, ch'io sappia, alcuna cronaca del tempo, nè alcuno studio di poi. Fatto sta ed è che un'altra operetta del Saccheri fu pubblicata a Torino nel 1697 con il titolo di « Logica demonstrativa » (1).

Più importante ad ogni modo per noi e, credo, per tutti, è il suo « Euclides ab omni naevo vindicatus » (2). In questo libro il tentativo di dimo-

---

sato e il presente delle principali teorie geometriche; R. Bonola, *La geometria non euclidea*, Esposizione storico-critica del suo sviluppo (Bologna, 1906); Richard, *Sur la philosophie des mathématiques* (Chap. III); L. Rougier, *La philosophie géom. de H. Poincaré* (Chap. II, III); Zeuthen, *Hist. d. mathématiques* (tr. fr.), pag. 110-114.

(1) Una copia di tale edizione esiste tuttora — ci rende noto l'Enriques — nella Biblioteca Vittorio Emanuele in Roma. Notizie particolari su la *Logica demonstrativa* potrai trovare in un articolo del Vailati (in *Rivista di filosofia*, 1903, n. 4), ristampata in *Scritti*, pag. 477 segg.

(2) Tradotto in italiano dal Boccardini con il titolo di: *Euclide emendato* (Milano, Hoepli, 1904). Il titolo preciso e completo dell'opera originaria è: *Euclides ab omni naevo vindicatus:*

strazione del V postulato è, per la prima volta, fatto con quel procedimento — d'altra parte già adottato dallo stesso Saccheri nella sua « Logica » — della ***reductio ad absurdum***. Ricordiamo tutti in che cosa consista: porre in luce che il non ammettere la proposizione che si deve dimostrare vera, ci porterebbe ad una contraddizione con una proposizione precedentemente riconosciuta vera. È un procedimento come si vede che si riconnette con il principio di contraddizione e perciò incondizionatamente accettato dai matematici di tutti i tempi (una traccia di esso troviamo già in Euclide, IX, 12) e perciò molto spesso adottato dai filosofi — Socrate ne usava volentieri — ma che, malgrado tutti i suoi pregi indiscutibili e la sua azione sicura nel mettere l'ipotetico avversario con le spalle al muro, lascia nel logico che lo adopera un senso di relativa soddisfazione. Procedimento ricco di risultati d'altronde: attenendosi ad esso il Lobatchefski arrivò alle sue meravigliose costruzioni di geometria non euclidea (1).

È d'altronde risaputo che sempre si sentì il bisogno di marcare la differenza fra assiomi e postulati: Euclide stesso con il darcene due elenchi nettamente distinti e separati. Le differenze di tale distinzione dipendono soltanto dalla diversità del punto di vista sotto il quale i principii medesimi vengono considerati.

---

sive conatus geometricus quo stabiliantur prima ipsa universae geometriae principia (Milano, 1733).

(1) N. S. Lobatchefski, *Pangéométrie ou Théorie générale des parallèles, suivie des opinions de D'Alembert sur le même sujet et d'une discussion sur la ligne droite entre Fourier et Monge* (Paris, Gauthier-Villars). Cfr. pure F. Engel, *U. I. Lobachefsky: Zwei geometriche Abhandlungen* (Leipzig, 1898).

Fra tali caratteri differenziali il più semplice e il più convincente per noi, per quanto non bene accetto in generale ai matematici in causa della sua non precisa determinazione tecnica, è quello dell'*evidenza,* maggiore negli assiomi che nei postulati. Si è già accennato come invece l'evidenza può essere un criterio di per se stesso sufficientemente rigoroso. Sotto tale aspetto troviamo già in Proclo una distinzione fra gli assiomi e i postulati; ma su di essa non possiamo basarci perchè altre distinzioni seguono nello stesso storico matematico per la classificazione dei principii fondamentali in assiomi e postulati. Chi voglia su questo punto maggiori schiarimenti può consultare l'esposizione del Vailati al III Congresso internazionale di matematica (Heidelberg, 1904) (1).

Io mi fermo al criterio di maggiore o minore evidenza perchè esso mi sembra il più rispondente al nostro punto di vista. Considerando l'evidenza secondo fu sopra esposto, non possono nascere equivoci intorno alla sua interpretazione: l'inconcepibilità del contrario e il carattere *assoluto* di essa è proprio degli assiomi; l'incredibilità del contrario e il carattere *relativo* di essa è proprio dei postulati.

---

(1) Oppure in *Scritti,* pag. 547-552 (CXXII. — *Intorno al significato della differenza fra gli assiomi e i postulati nella geometria greca*). Cfr. inoltre: Zeuthen, *Historie des mathématiques* (tr. fr., pag. 92-114); Enriques, *Per la storia della logica* (pag. 19-30); Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (Milano, Hoepli); *Guida allo studio d. storia d. mat.* (Milano, 1916); Canton, *Geschichte der mathematik,* I (Leipzig, 1880); Simon, *Geschichte der mathem. im altertum* (Berlin, 1909); Milhaud, *Les philosophes géomètres de la Grèce* (Paris, 1900); Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géometrie* (Paris, I ed., 1867).

Appunto il carattere relativo e condizionato di questi ultimi può permetterci dei dubbii sulla loro apriorità (in senso kantiano) e spiega quella convenzionalità parziale che noi troveremo in essi e in certo qual modo potrà giustificare quella convenzionalità totale che non pochi matematici moderni — e non certo fra i meno illustri — crederanno di potere incondizionatamente affermare nei principii fondamentali della matematica.

Come si vede la mia tesi di una parziale convenzionalità di alcuni principii fondamentali è quanto mai limitata. Essa differisce profondamente da quella di Locke, al quale a ragione il Leibniz rimprovera di supporre che gli assiomi stessi siano stati ammessi così, quasi senz'alcun fondamento, quasi « gratuitamente ». Certo anche quei principii che abbiamo considerato come effettivamente innati, non si sono presentati al nostro spirito originariamente nella loro precisa formulazione scientifica; ma ciò non toglie nulla alla loro chiarezza: è anzi sommamente lodevole che alla precisa espressione loro si sia addivenuti. Soltanto, l'obbiezione di Filalete a Teofilo (« Non è forse dannoso autorizzare supposizioni sotto il pretesto di assiomi? ») (1) mantiene, malgrado la risposta di Teofilo, la sua ragione di essere. Una parte di tali principii conserva la sua ipostasizzazione convenzionale, la quale non può essere giustificata, come fa in fondo Leibniz, se non ricorrendo al suo carattere utilitario provvisorio: nè i matematici moderni si comportano diversamente.

Per precisare meglio in base a quanto sopra: fanno parte della prima categoria di tali proposi-

---

(1) LEIBNIZ, *Nouv. Ess.*, IV, cap. 12.

zioni (cioè principii spogli di qualunque carattere ipotetico) verità come queste:

$$A = A$$

$$\frac{A}{2} < A$$

e così via. Verità che, come si vede, sono tali da ricordarci la frase di Platone nel Teeteto: « nemmeno in sogno hai osato sussurrare a te stesso che il dispari è pari », e quanto Pascal ebbe a dirci consigliandoci « di non accingerci nemmeno a tentare di dimostrare alcuna cosa che sia talmente evidente per se stessa che nulla vi sia di più chiaro per poterla dimostrare e provare ».

Fanno parte della seconda categoria (in cui è insito cioè un carattere ipotetico) alcuni di quei principii che sono proprii particolarmente della geometria, come ad esempio:

« Per due punti dello spazio può sempre passare una retta data e una soltanto »;

« La retta è il più breve spazio fra 2 punti »; principio questo ad es. che pare già lo stesso Archimede non considerasse altro che un'assunzione, un'ammissione (λαμβανόμενα) (1).

Kant stesso si accorse che una differenza fondamentale esisteva fra le due categorie di giudizii da noi citati. Soltanto, preoccupato di vedere ogni

---

(1) *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii.* Ed. Heiberg, 1910, Lipsia. (Cfr. in ENRIQUES, *Per la storia della logica,* pag. 25, 26). L'edizione inglese sul testo di Heiberg fu curata da T. L. HEAT, *The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg with Introduction and Commentary* (3 vols., Cambridge, 1908). Vedi pure a cura dello stesso Heat: *The Works of Archimedis* (Cambridge, 1897).

differenza fondamentale dei giudizii in genere nel loro carattere sintetico o analitico, venne senz'altro a fissare la differente natura fra le due categorie di giudizii da noi accennati, all'essere quelli della prima categoria ($A = A$ ecc.) « analitici », venendo così ad escludere precisamente quei principii che pur non essendo proprii soltanto della matematica, ad essi portano indubbiamente grande vantaggio per quanto ha attinenza alla incondizionata obbiettività dei suoi assiomi. Giudizii simili a quelli da noi posti nella prima categoria apparterrebbero infatti, secondo Kant, a quel « piccolo numero di giudizii supposti dai geometri » che sono contrariamente ai noti esempii da lui precedentemente esaminati, « realmente analitici ed hanno la loro base sul principio di contraddizione » (1).

§ 13. L'essere e il dover essere della matematica. — Non è qui il caso di discutere l'opportunità o meno del criterio generale cui Kant si è attenuto nella divisione dei giudizii in sintetici ed analitici. Innanzi tutto le nostre considerazioni in merito non potrebbero che molto indirettamente aver relazione con quanto andiamo trattando: in secondo luogo confesso di non essere mai riuscito

(1) *Kr. r. Ver.* (tr. fr.), Introduzione. Cfr. pure *Prolegomeni* (tr. it.), § 2, nonchè i §§ 36-37 della *Logik* (Jäsche ed.). Senza alcun riferimento al significato delle parole analitico e sintetico nella dottrina kantiana, ma interessanti nei riguardi del carattere analitico o sintetico del giudizio matematico sono i due studii seguenti: GERGONNE, *De l'analyse et de la synthèse dans les sciences mathématiques* in *Annales des mathématiques,* VII, pag. 345 segg.; P. BOUTROUX, *En quel sens la recerche scientifique est-elle une analyse?* negli *Atti del Congresso di Filosofia di Bologna nel 1911,* nonchè cenni nel famoso libro dello ZEUTHEN, *Hist. des math.* (tr. fr.), pag. 93.

a comprendere l' importanza delle polemiche sollevate al riguardo, dato che, in ultima analisi, qualunque giudizio presuppone pur sempre una sintesi.

Possiamo tuttavia con il Franchi osservare come il primo di questi giudizii che abbiamo creduto di far rientrare in una prima categoria ($A = A$), che Kant pretende di poter ritenere senz'altro come analitico, non lo sia affatto, ma sia invece puro e semplice giudizio d'identità. « Or come mai c'entra qui l'analisi? » — si domanda il Franchi (1) — il quale poco appresso conclude: « Quel principio è adunque un giudizio *identico* e non *analitico*. Nè piglia valore comparativo dalla nozione di *eguaglianza* che v'è inclusa, poichè quell'eguale significa propriamente identico; l'identità assoluta come relazione proveniente dalla sola replica di uno stesso concetto, non ha a che fare con la relazione che costituisce un giudizio comparativo e che consiste nel paragonare il grado di convenienza di una proprietà medesima a più subietti, o di più proprietà a un medesimo subietto ».

Nè in modo molto diverso potremmo ragionare per quanto riguarda il secondo principio esemplificativo di questa stessa categoria di giudizii $\frac{A}{2} < A$, oppure per prendere proprio quello scelto da Kant: $(A + B) > A$ (2). Qui la comparazione

(1) A. Franchi, *La teorica del giudizio,* v. I, lettera VII, pag. 41 segg. (1870).

(2) In questo caso l'obbiezione del Couturat, essere tale principio vero soltanto nei riguardi dei numeri finiti, ma errato, come ebbe a dimostrare il Whithehead, per i numeri cardinali infiniti non ha alcuna ragione di essere, trattandosi qui di un

indubbiamente esiste, ma non potremmo concludere però se il giudizio, anche scrupolosamente attenendoci al criterio kantiano, sia più analitico che sintetico o viceversa.

E basti questa osservazione incidentale sul carattere analitico o non di un tale determinato giudizio. A noi importa però mettere in particolare rilievo come la prima categoria di tali giudizii, che abbiamo considerati come effettivamente innati e incondizionatamente evidenti, non siano però proprii esclusivamente della geometria, ma bensì di ogni nostra attività intellettiva. Essi possono tutto al più, aggiungiamo noi, avere una più rigorosa espressione e una più vasta applicazione nella matematica che in qualsiasi altra scienza particolare, in quanto appunto essa deve considerarsi come la scienza omogeneamente costituita ed organica che abbia la sua sfera d'azione in un campo non empirico, e perciò, come si è veduto, più vicina alla logica. A tale conclusione ha potuto *logicamente* arrivare soltanto l'idealismo, ma ciò è stato, implicitamente od esplicitamente, riconosciuto anche

---

principio generale, non già applicato specificatamente alla matematica. Come d'altronde fa anche Kant, che in fondo avrebbe potuto cavarsela con onore anche senza la benevolenza del Couturat (in *Revue de métaphysique,* 1904: *La philosophie des mathématiques de Kant,* pag. 346), secondo il quale: « on ne peut reprocher à Kant d'avoir ignoré ces vérités, si élémentaires qu'elles soient aujourd'hui ». Infatti nessun significato può avere la constatazione del Whithehead e l'osservazione del Couturat se non condizionatamente al ristretto campo, dirò, tecnico della matematica. Il numero cardinale infinito non può essere in alcun modo afferrabile non soltanto dalla sensibilità umana, ma nemmeno dal pensiero puro: esso non è che una artificiosa creazione non altrimenti identificabile che per necessità di calcolo esclusivamente matematico.

dal pensiero positivico. Il Comte in fondo deve ciò ammettere implicitamente, per essere coerente con la sua convinzione essere la matematica « la scienza più antica e più perfetta » (1). Anzi il suo entusiasmo per la matematica è andato tanto oltre che, per mantenersi, almeno apparentemente, fedele al suo principio positivistico e non intaccare la validità delle proposizioni matematiche, ha trovato opportuno introdurre in tale disciplina una divisione in matematica « concreta » (avente carattere sperimentale, fisico) e matematica « astratta » (di natura essenzialmente logica). Quanto si è detto fino ad ora ci dispensa dal mostrare come tale distinzione sia del tutto personale e arbitraria e quanto tutte e due le affermazioni, anche prese a sè stanti, siano secondo noi fondamentalmente errate, in quanto appunto si è sostenuto non essere mai la matematica nè direttamente sperimentale, nè puramente logica.

Ho creduto opportuno di riportare tali osservazioni del Comte in quanto esse mostrano pur sempre come in qualunque indirizzo del pensiero filosofico si sia veduta la necessità di considerare la matematica pura come la scienza più vicina alla logica. Naturalmente questa affermazione deve essere presa con quella prudenza cui ci dà diritto di aspirare quanto siamo andati svolgendo nel cap. II sul carattere prevalentemente intuitivo del procedimento matematico; ma l'affermazione stessa ci allontana alquanto da Kant dato che non possiamo accettare la distinzione ch'egli viene implicitamente ad ammettere intorno al valore di questi giudizii che egli chiama « analitici » per quello che

(1) *Philosophie positive,* I, cap. III.

riguarda la matematica. Kant cioè dicendoci che queste verità ($A = A$ ecc.) non servono « come proposizioni identiche che alla concatenazione del metodo e non rivestono la funzione di veri principii » (1) viene a introdurre una specie di distinzione fra quel che possono essere i principii « a priori » della matematica e quelli della logica, distinzione che soltanto rispetto alla concezione idealistica di una realtà superiore possiamo accettare, ma ciò non è nella distinzione kantiana. Inoltre la distinzione medesima, dato il fondamento sintetico « a priori » di ogni scienza, verrebbe ad allontanare da una base logica ogni scienza; mentre i principii fondamentali di qualunque attività del pensiero non possono effettivamente essere vagliati, se non basandosi esclusivamente su quel criterio logico che è comune a tutte le scienze.

Che poi la categoria di giudizii che stiamo esaminando e che abbiamo affermato essere la sola effettivamente assiomatica, in quanto la sola naturalmente ed incondizionatamente evidente, non sia propria soltanto della geometria, come invece l'altro principio citato per cui per un punto non può passare che una sola parallela a una retta data, questo non significa affatto che quei principii assiomatici non possono essere considerati come principii « a priori » non soltanto *anche*, ma *prevalentemente* della geometria per la posizione particolare di questa e dell'aritmetica di fronte al sapere (2). Se i principii medesimi sono poi applicabili anche alle altre scienze, ciò dipende dal fatto molto naturale che principii effettivamente innati

(1) *Critica*, ed. cit., pag. 48.
(2) V. cap. I.

non possono essere esclusivamente proprii di questa o quella disciplina particolare, ma esse li possono tutto al più considerare e su di essi appoggiarsi a seconda del proprio punto di vista. Mi sembra in ogni modo fuori di discussione che i principii medesimi trovino il loro naturale svolgimento proprio in quella scienza geometrica dalla quale Kant vorrebbe bandirli.

Questa tendenza a voler troppo specificare, esemplificando dei principii generalissimi come quelli « a priori » — tendenza pertanto in contrasto con il significato più profondo della teoria dell' « a priori » — ha potuto dar luogo facilmente ad errate interpretazioni.

Povero Kant! Il suo « metodo analitico » con tanta fiducia adottato nei « Prolegomeni » in contrasto con quello « sintetico » che si era rivelato troppo oscuro per la comprensione della « Critica » nei suoi primi interpreti, non è stato così ricco di risultati presso la gran parte dei lettori, come Kant si riprometteva. Ci dice Kant, ricordiamocelo, che poichè il metodo applicato nella « Critica » aveva potuto dar luogo ad equivoci interpretativi nel senso che sbalzava di colpo il lettore nel mondo dell' indeterminatezza metafisica, egli intende svolgere nella chiarificazione riassuntiva nella sua opera fondamentale — e cioè nei « Prolegomeni » — il metodo inverso, ossia di portare gradatamente il lettore al problema della metafisica affrontando prima quello delle scienze particolari, le quali, in quanto più organiche, già costituite, già scientificamente ammesse e riconosciute, potevano facilitare il compito, se non dell'autore, almeno del lettore. Fra tutte le scienze la matematica e la fisica erano le più rispondenti allo

scopo, la prima per la sua evidenza, la seconda per la facilità del controllo sperimentale: nul-l'altro.

Vana speranza! Si è tanto bene compresa questa intenzione che si è voluto fare della I e II parte del problema trascendentale, un trattato di filosofia delle scienze. Si è arrivati a vedere in quella che è un'indagine puramente gnoseologica per arrivare alla metafisica in senso stretto — procedimento pertanto indispensabile — una ricerca particolare chiusa nell'orizzonte limitato della matematica e della fisica. E naturalmente e matematici e fisici non si sono lì dentro riconosciuti! Se Kant avesse presentato in un ipotetico congresso filosofico dei suoi tempi, un'eventuale « comunicazione » sugli argomenti trattati nelle prime due parti dei « Prolegomeni », essa sarebbe stata rubricata da questi eccellenti interpreti nella « sezione » di filosofia delle scienze, non già della teoria della conoscenza!

Tanto per darne un esempio ricordiamo che nella dottrina dei concetti intellettivi la categoria della sostanza trova la sua espressione nel principio fisiologico della « permanenza della sostanza ». Ciò ha potuto dar luogo ad osservazioni come questa: che il principio medesimo, ben lungi di essere « a priori » è stato trovato da Lavoisier a mezzo di successive esperienze. Ma questo, ben lungi dall'essere in contrasto con la teoria kantiana dell'intelletto, ne è la conferma! Lavoisier ha trovato l'applicabilità del principio nell'esperienza, ma l'essenza del concetto sostanza era già, era « a priori », era nell'intelletto. Chissà che ciò non sarebbe stato osservato se Kant non l'avesse fatto figurare, a maggior comprensione e volga-

rizzazione dell'analitica trascendentale della « Critica », nel problema della *fisica* pura nei « Prolegomeni » ?.

E non si disse forse, e si scrive, che l'esempio — certo non bene scelto — di « alcuni corpi sono pesanti » come proposizione sintetica era da Kant stato fondato perchè egli, ammettendo, appunto in quanto giudizio sintetico, che il predicato « pesante » non era già implicito nel soggetto corpo — intendeva alludere all'aria nulla sapendo della scoperta di Torricelli ?.....

Ciò non pertanto è doveroso riconoscere che gli esempii non sono nella dottrina kantiana sempre opportuni. La stessa proposizione testè ricordata ne è la conferma. Nello stesso modo l'esempio citato nel § 12 dei « Prolegomeni » a conferma che l' intuizione spaziale è « a priori », esempio che ricorda la proposizione della geometria euclidea per la quale non si possono tagliare nello stesso punto ad angolo retto che tre sole rette e che è su tale verità, fondata appunto sull' intuizione pura « a priori », che possiamo basarci per affermare che lo spazio perfetto non ha nè più nè meno di tre dimensioni, avrebbe potuto essere sostituito più direttamente e con maggiore efficacia dal postulato delle parallele. Così pure nel § 38 degli stessi « Prolegomeni » in quell'esempio delle « due linee che taglino se stesse e ad un tempo il circolo in qualunque modo vengano tirate, si dividono sempre secondo una regola tale che il rettangolo avente per lati i due segmenti è uguale (1) al rettangolo avente per lati i segmenti dell'altro », Kant va a perdersi in argomentazioni che vengono

(1) Kant dice « uguale »; avrebbe dovuto dire « equivalente ».

a complicare un teorema pertanto molto semplice di geometria e che non sono necessarie per rispondere al problema che fondamentalmente c'interessa per sapere cioè se la « legge » — come la chiama Kant — dell'uguaglianza del raggio è nel circolo come figura a sè, indipendentemente dal pensiero, oppure è il nostro intelletto che la impone ad esso. E così altre osservazioni del genere si potrebbero fare.

Sono queste indubbiamente meticolosità che non nuocciono alla genialità del sistema, ma che ci presentano l' inconveniente del particolarismo e offrono il fianco a facili critiche. Non nuocciono alla genialità del complesso perchè non sono certo degli esempii non bene scelti, che possono intaccare il compito essenziale della trattazione dell'analitica trascendentale nella « Critica » e della fisica pura nei « Prolegomeni » consistente nel porre in luce la funzione del concetto intellettivo puro « a priori » nella formazione dell'esperienza, come ho già dovuto altrove accennare.

Per questo possiamo notare che nessun fisico riconoscerebbe della fisica nella materia trattata da Kant sotto questo nome: è dessa metafisica vera e propria, uno svolgimento perfettamente conseguente con la trattazione della matematica pura (estetica trascendentale); ma meglio comprenderemmo il complesso svolgersi di tutta la teoria chiamando la prima (matematica pura) conoscenza *intuitiva*, e la seconda (fisica pura) conoscenza *intellettiva*. E con ciò d'altra parte si entrerebbe nel significato profondo del pensiero kantiano se lo svolgimento di quello ch'egli chiama il problema propriamente metafisico si denominasse conoscenza *razionale*, adottando la distinzione fra

intelletto e ragione come Kant l'intende ossia l'intelletto come attività informatrice della natura e quindi l'elemento che solo può rendere possibile la conoscenza della natura — l'esperienza —; la ragione come attività puramente *ideale* (nel suo preciso significato) che nulla può obbiettivamente darci in quanto pretende di fare a meno dell'esperienza, ripudiando così quell'elemento sensibile al quale malgrado ogni nostro sforzo noi non possiamo fare a meno di ricorrere quando vogliamo in certo qual modo rappresentare l'elemento che è mèta della nostra indagine conoscitiva.

Il carattere metafisico della fisica pura come Kant l'intende è d'altronde ammesso anche dal più rigoroso idealismo trascendentale odierno direttamente influenzato dal criticismo kantiano. Così il Martinetti nel suo « Commento » ai « Prolegomeni » (pag. 215) scrive: « i giudizii della fisica pura (§ 15) sono giudizii metafisici », nonchè (pagina 219 ibid.): « la fisica pura sarebbe quindi la metafisica immanente della natura esteriore, che noi possiamo conoscere « a priori » in quanto procedono dalle forme pure dell'intelletto ».

Ho accennato anche ai principii della fisica pura secondo Kant perchè essi, più di tutti gli altri, ci possono mostrare come una dottrina profondissima e sistematicamente svolta come quella dell' « a priori » possa portare a interpretazioni errate volendo in essa distinguere un « a priori » matematico da un « a priori » fisico e così via; ed è naturale che sia così: l'apriorità è insita nella stessa natura del nostro processo conoscitivo, del nostro pensiero medesimo; la suddivisione del *sapere* in tante branche particolari non è effetto invece che di una specializzazione recentissima dovuta a una

maggiore comodità di orizzontarsi nel sempre più vasto campo del sapere. In questo senso possiamo considerare che la dottrina dell'apriorità non può venire posta in dubbio dalle precedenti e dalle susseguenti nostre considerazioni e tanto meno della metageometria; resta intatto il gran merito di Kant di averci dimostrato che qualunque conoscenza, per essere universale e necessaria, ha bisogno di un'azione immediata innata del nostro pensiero; ma il merito stesso, non in senso assoluto, ma certo in senso relativo (nel caso nostro, della matematica, non ha potuto uscire intatto in causa dell'esclusione o quasi dal campo geometrico proprio di quei giudizii che alla geometria dànno più valido appoggio per la sua obbiettività.

Concludendo, da quanto precede verrei ad affermare questo: se i principii « a priori » della matematica fossero esclusivamente della prima categoria

$$\left(a = a,\ \frac{a}{2} < a,\ \text{ecc.}\right),$$

si potrebbe senz'altro accettare la dottrina di Kant anche nelle sue estreme conseguenze: basandosi invece la matematica su altri principii particolari tutti suoi proprii, e, ciò che più conta, principii passibili di discussione per ammissione degli stessi matematici, mi sembra si possa concludere che la matematica *tende* a diventare quale Kant la concepisce, ma che tale essa non sia ancora attualmente.

Cerchiamo di precisare meglio in che cosa consista questo tendere della matematica a dare ai suoi giudizii valore universale e necessario e a *divenire*, secondo il nostro modo di vedere, la più alta espressione della conoscenza sensibile; al di-

venire cioè il numero l'elemento meglio adatto nel conoscere il mondo della nostra sensibilità. Siamo ben lontani evidentemente dall'assolutismo di alcuni fisici moderni che si riconnettono agli antichi pitagorici; ma se tale assolutismo non può in alcun modo essere accettato in filosofia, è però spiegabile in un fisico. Emilio Borel non si perita di dichiarare che « spiegare il mondo non può significare altro per lo scienziato che dare del mondo una descrizione numericamente esatta ». Ma egli stesso sente il bisogno d'immediatamente soggiungere che per soddisfare i più esigenti sarebbe necessario che « tale descrizione numerica abbracciasse così il futuro come il passato » (1), vana aspirazione sempre, ma tanto più irraggiungibile basandoci essenzialmente sul metodo matematico. Quand'anche la metereologia potesse per un qualsiasi giorno avvenire predirci esattamente la pressione, la temperatura, ecc., il nostro pensiero si domanderebbe pur sempre *come* siamo giunti a questo: il nostro pensiero dubiterebbe pur sempre che nel magnifico risultato ottenuto non sia da escludersi, sia pure forse in minima parte, l'effetto favorevole del caso, e quando anche il risultato favorevole si ottenesse non una, ma mille volte, entrambe le obbiezioni resterebbero nella loro intensità dubitativa.

§ 14. **La funzione del postulato e il dover essere della matematica.** — La concezione di un divenire della matematica, più specificatamente di un tendere di essa a diventare la più alta espres-

(1) Cfr. E. Borel, *L'espace et le temps,* pag. 209 segg. (Paris, 1922).

sione della realtà sensibile, non ci sembrerà affatto arbitraria se noi ci rappresentiamo tale scienza come intenta a una sempre maggiore purificazione di se stessa. E anche tale rappresentazione non ha nulla di arbitrario, in quanto, oltre all'essere questa la naturale tendenza di ogni sapere che aspiri ad essere rigorosamente scientifico, la possiamo nella matematica precipuamente riscontrare nell'ammissione degli stessi matematici della necessità di ridurre a un minimo indispensabile i postulati fondamentali: bisogno quindi non soltanto intuito, ma messo in pratica (1), sia col far derivare alcuni giudizii matematici, precedentemente giudicati assiomatici, da altri postulati a mezzo di un processo deduttivo-sostitutivo, come si è veduto nelle prime pagine di questo capitolo; sia col ridurre i postulati a teoremi, risolvendoli poi col processo dimostrativo.

Ove a questa tendenza i matematici si fossero strettamente attenuti, si avrebbe oggi una scienza indubbiamente meno sviluppata di quella che effettivamente si abbia; ma di questo tendere della matematica a piegarsi in certo qual modo su se stessa, lo possiamo oggi osservare nettamente nell'opera dei più notevoli filosofi della matematica. Secondo essi mèta del matamatico oggi non deve essere l'ampliamento, dirò, di essa, non la «scoperta» di nuove proposizioni, ma un sobrio periodo di riflessione è per essa più profittevole che quell'incessante avanzare che soltanto apparentemente può significare progresso. Se ben guardiamo,

(1) Degna di nota la constatazione storica de Boutroux: «Le nombre des postulats indémontrables a été de plus en plus restreint». (*L'Idéal sc. math.*, pag. 251).

le stesse creazioni della metageometria rappresentano più una fase di riflessione che di creazione. È quanto avviene anche in discipline che nulla hanno a che vedere con la matematica: non vediamo forse in economia politica una forte ed agguerrita corrente di sociologi arrestarsi perplessa dinnanzi alla corsa dell'umanità verso una sempre maggiore ricchezza e verso una sempre più sensibile miseria? La miseria è diminuita sia pure; ma è diminuita soltanto se manteniamo inalterate le esigenze dell'uomo: e perchè proprio dai progressisti più convinti non si dovrebbe riconoscere come del tutto naturale e giusto anche il progresso nelle esigenze umane? Se noi facciamo progredire di pari passo queste esigenze con l'aumento globale della ricchezza del mondo, ecco che ci spiegheremo senza troppa fatica come, malgrado tutti gl'infiniti miglioramenti economici di cui si compiace con se stessa la civiltà contemporanea, la massa è infinitamente più malcontenta oggi che non un secolo, molti secoli fa: ecco così sorgere quello che si potrebbe chiamare la fase critica, di riflessione del problema economico, non più dell'aumento della ricchezza, ma di quello ben più complesso e più umano di un'equa distribuzione di essa. Ecco prorompere il problema teoretico medesimo nell'azione pratica che può naturalmente degenerare in manifestazioni brute e violente.

Per questo credo si possano notare dei segni — precursori se volete, ma pur sempre non dubbii — di un periodo di raccoglimento nell'attività intellettiva dell'uomo: è una specie di sosta nella quale sembra ci domandiamo: « ma è proprio questo folle avanzare senza mèta, questo " progresso " cieco, ciò che forma la rivelazione più alta della mia

umanità? ». O non sarebbe piuttosto doveroso o, se la parola vi spaventa o la trovate di sapore arcaico, più utile, che insieme ci si metta a rimirare il cammino percorso e che serenamente esaminiamo se tutto in tale cammino significa effettivamente progresso; se tutte le tappe che abbiamo percorso furono effettivamente fatte nella stessa direzione, per la stessa via, o non ci siamo piuttosto smarriti in sentieri trasversali dai quali sarà saggio ritornare sulla strada maestra per poi riprendere di nuovo il cammino fatti più avveduti dalla dolorosa esperienza provata, più severi di fronte agli allettamenti di un correre verso grandiose conquiste che più si approfondiscono e più ci rivelano la loro natura illusoria e, soggiungerebbe uno scettico, derisoria ed ironica?

Senza dubbio il procedere della matematica verso orizzonti sempre più vasti è riguardoso e prudente, e prova ne sia che quasi sempre i nuovi postulati introdotti vengono poi in processo di tempo più o meno lungo, riscontrati esatti; ma questo non basta per determinarci a credere che la formulazione dei nuovi postulati, che le necessità sempre maggiori vanno creando, come quelli antichi presi come punti di partenza agli albori di tale scienza, siano del tutto simili con i nostri principii innati.

Il controllo ulteriore dell'esattezza dei postulati medesimi prova come la convenzionalità del mondo geometrico sia indubbiamente molto limitata e non certo da potersi estendere agli estremi limiti cui hanno creduto di poter arrivare alcuni entusiasti della nuova metageometria, identificando appunto la convenzionalità del mondo euclideo con quella totale del sistema metrico decimale. Ma non per questo dobbiamo esagerare l'efficacia del controllo

medesimo: non v'è affatto il bisogno di ammettere un'origine insita nel nostro stesso intelletto perchè dei principii possano essere considerati per lo meno parzialmente ipotetici, anche se in seguito vengono riscontrati esatti. È infatti del tutto naturale che intelletti superiori dediti esclusivamente agli studii matematici, con essi quasi immedesimati (mi si passi l'espressione), abbiano quasi sempre, o anche sempre, veduto giusto.

Ciò, lo abbiamo veduto, può riscontrarsi anche nelle scienze empiriche ed abbiamo accennato a scoperte di Galileo e di Newton, le quali hanno la loro lontana origine in ipotesi, poi controllate valide dal metodo sperimentale.

Ma in ogni modo non è già un errore il supporre, più ancora, il ritenere indimostrabile una proposizione, che poi si riesce a dimostrare, e, si noti, a dimostrare alcune volte con un carattere pure indubbiamente più rigorosamente scientifico di quello che effettivamente questa scienza non abbia. Cioè il tendere della matematica a divenire la vera espressione apodittica della nostra conoscenza sensibile se è rivelato da quanto sopra, è però ostacolato dal miraggio di estendere sempre maggiormente i suoi confini; di affrontare sempre nuovi problemi per risolvere i quali necessita molto spesso l'ipostasizzazione di una nuova definizione o di un nuovo postulato che spesso presuppone una definizione. Ciò non può verificarsi che a detrimento, per lo meno parziale, della necessità e univesalità dei suoi giudizii; le quali prerogative non possono ammettersi che *condizionatamente* all'accettazione dei postulati che vengono man mano introdotti. Questi possono alla lor volta essere concepiti be-

nissimo — faccio mia l'immagine del Fouillée (1) — come anelli provvisoriamente posti come indimostrabili onde il tutto matematico non perda quella continuità e quell'organicità su cui si basa.

E ciò avviene, alcune volte, con gli stessi mezzi d'indagine con i quali prima si era dichiarato il contrario. In questo caso la questione non esce dal campo puramente tecnico del matematico. Se è vero che questi non deve nemmeno curarsi di sapere se i suoi postulati rispondano più o meno a delle reali verità, più ancora se per lui la questione è vuota di senso — lo si sostiene, ma non ne vedo il perchè — compito del matematico è però di far sì che le ipotesi da lui supposte come punti di partenza, debbano necessariamente portare alle deduzioni ch'egli si è proposto di trarne. Inoltre, nella formulazione delle ipotesi medesime, egli dovrà non aver nè mancato nè ecceduto: nel corso delle deduzioni se egli ha formulato un numero insufficiente d'ipotesi, egli avrà agio di accorgersene ed eventualmente di rimediare; ma se il numero d'ipotesi da lui ammesse è superiore a quello che era necessario per dimostrare ciò che voleva, egli correrà il pericolo, nota lo Zeuthen, di « vedersi provare da altri che alcune delle sue ipotesi erano contraddittorie, o potevano derivare le une dalle altre » (2).

Il che significa che anche restringendo al massimo il compito del matematico — nel senso che egli ha il diritto di prescindere da ogni preoccupazione di natura filosofica — egli non può man-

(1) A. Fouillée, *L'avenir de la méthaphysique fondée sur l'expérience.*

(2) Zeuthen, *op. cit.*, tr. fr., pag. 95.

care però di attenersi al conflitto sopra detto, cioè far sì che le ipotesi adottate non possano nel corso delle successive dimostrazioni risultare contraddittorie — ciò che è evidente per tutti — ma altresì che esse ipotesi non possano risultare in alcun modo deducibili da altre proposizioni note.

Ma vi è di più: perchè questo incessante tentativo di dimostrazione si verifica, se il nostro intelletto ci ha subito fatto balenare la verità medesima come di una tale evidenza per cui l'intelletto stesso non doveva non solo riuscire, ma nemmeno *tentare* di completare ciò che esso stesso trovava quasi parte di se medesimo?

Tali verità innate dovrebbero imporsi con una tale violenza al nostro spirito che nessuno penserebbe di ricercarne la spiegazione in modo più concreto e positivo, precisamente come a nessuno è mai venuto *seriamente* in mente di dimostrare che $a = a$, o altri giudizii di simil natura di per se stessi effettivamente evidenti (1).

Eppure la geometria è piena di tali indagini che si possano a buon diritto chiamare vittorie su se stessa.

Inoltre, non vi sembra più conseguente che, ove i postulati fossero in noi verità effettivamente innate, non si sentirebbe il bisogno di aumentarle in omaggio al sempre più vasto campo d'azione della matematica? Tale bisogno non *potrebbe* verificarsi. Ma, mi potreste rispondere, ciò si verifica in quanto i principii medesimi non si presentano naturalmente nello stesso numero e con la stessa intensità al pensiero umano in tutte le gradazioni

(1) Si potrebbero qui ricordare di nuovo le frasi, citate al § 7, di Platone e di Pascal.

del suo sviluppo: i principii innati del primitivo possono essere ridotti a ben pochi; numerosi invece sono quelli dell'uomo civilizzato odierno. Ciò dipende da cause molteplici nella ricerca delle quali nemmeno il più rigido idealismo trascendentale può prescindere dalle considerazioni fisiologiche inerenti al più complesso sviluppo dei nostri organi mentali; dell'ereditarietà concepita come esperienza multimillenaria del nostro intelletto, e così via.

Tutte cause-effetti, come si vede, perfettamente plausibili; ma tuttavia alquanto vaghe a un attento esame, alquanto insufficienti quando ci si trova di fronte al caso particolare. Leibniz (1), ad esempio, ci dice come l'assioma per il quale di due linee curve che abbiano entrambe la loro concavità dalla stessa parte è maggiore quella che è al di fuori dell'altra, sia stato ammesso (unitamente d'altronde a diversi altri) per la prima volta da Archimede. Ora possiamo noi credere che effettivamente la pura e semplice evoluzione del pensiero in sè stante, cioè indipendentemente da ogni particolare necessità matematica, sia stata tanto sensibile da Euclide ad Archimede da poter da sè sola giustificare l'introduzione della nuova verità fondamentale?

Non acquisterebbe ben maggior valore la nostra spiegazione se invece sostenessimo che è stato il particolare sviluppo della geometria in tale periodo di tempo a fare intuire ad Archimede che, ammettendo la proposizione medesima come verità fondamentale, egli avrebbe in certo qual modo potuto dedurre numerose altre proposizioni perfettamente

(1) *Nouv. Ess.*, IV, cap. 7.

consone con il principio di contraddizione, perfettamente apodittiche condizionatamente a quel postulato, del quale altri eventualmente avrebbero potuto in seguito stabilire la certezza?

Per conto mio non vi può essere dubbio nella scelta delle due interpretazioni: la seconda mi pare s'imponga con decisa chiarezza alla nostra ragione. E ciò affermando sono ben lungi dal negare il valore apodittico delle verità risultanti, dato che la minima convenzionalità che nelle verità stesse credo si debba ammettere ripensando in alcuni casi alla loro lontana origine, possiamo sperare che in processo di tempo possa venire eliminata per quanto abbiamo sopra esposto riguardo all' incessante sforzo della matematica per ridurre a un minimo indispensabile i suoi postulati. È già gran risultato scientifico il poter contare con sicurezza assoluta su proposizioni che richiedono, per essere universalmente vere, la sola condizione di accettare come universalmente vero un determinato principio, che, si noti, già di per se stesso non è affatto fantastico e arbitrario, ma principio tanto accettabile dal nostro intelletto da poter essere preso come base dell'ulteriore costruzione (1).

(1) Da un punto di vista puramente tecnico, e perciò senza diretta relazione con quanto esposto in quest'ultimo paragrafo, ma importante per ben comprendere le fondamenta della matematica, si potranno consultare le opere seguenti: SAUTREAUX, *Essai sur les axiomes mathématiques* (Grenoble, Gratier et Rey); DE CONTENSON, *Les fondements mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars); MAROGER, *Leçons critiques et historiques sur le fondement des mathématiques* (Paris, 1908); C. ELLIOTT, *Models to illustrate the foundations of mathematics* (Edimburg, 1914); DELÈGUE, *Essai sur les principes des sciences mathématiques.*

Capitolo IV.

La questione precedente svolta specificatamente nei riguardi della geometria (1).

§ 15. **La III dimensione dello spazio.** — La moderna metageometria però, forse troppo imbaldanzita dal successo — conseguenza naturale della sua stessa giovinezza — va ben oltre i limiti critici in cui noi ci siamo mantenuti nel precedente capitolo. Essa non si perita d'indagare anche nei più reconditi presupposti dei fondamenti euclidei, con il negare che la stessa intuizione dello spazio sia in noi naturalmente identica a quella della geometria euclidea: tale identità è la base *sine qua non* dell'innata evidenza dei principii della geometria medesima. Pure riconoscendo l'estrema importanza di questa ultima questione, faccio subito osservare che ove tale identità, contrariamente a quanto si ritiene oggi dalla metageometria e da non pochi psicologi, venisse in ultima analisi con l'essere dimostrata, le obbiezioni sopra esposte

(1) Cenni bibliografici: Del Re, *Sulla struttura geometrica dello spazio* (Napoli, 1911); P. Staeckel, *Geometrische Untersuchungen* (Teubner, 1913); Borel, *Geometrie* (Paris, Colin).

tendenti a mostrare un procedimento ipotetico — sia pure limitatamente quanto si vuole — della matematica e il suo divenire, resterebbero immutate. Abbiamo sostenuto che il valore universale e necessario del giudizio matematico è il suo *dover essere* e non già il suo *essere*, senza nemmeno alludere alla necessità di una differenza qualsiasi fra il nostro spazio e quello della geometria euclidea.

Così posti i termini del problema aggiungo una seconda osservazione, intimamente connessa con la precedente, e cioè che non pretendo affatto risolvere in questo capitolo il complesso problema dello spazio in se stesso considerato, dato che il problema stesso non è, a mio modo di vedere, indispensabile, come si è osservato, per arrivare alle conclusioni cui siamo arrivati; ma l'importanza di tale questione è estrema piuttosto per quei filosofi che incondizionatamente ammettono i principii kantiani anche nelle loro conseguenze ultime e particolari. Kant stesso per sostenere il suo punto di vista, ammette tale identità d'intuizione spaziale. Per quanto non ce ne dia mai una esplicita dimostrazione, o per lo meno passi a svolgere con ampiezza tale sua convinzione, vi è però un punto nei « Prolegomeni » che non permette si possano avere al riguardo dubbii di sorta. Alludo alla osservazione III, nella quale, dopo aver constatato ancora una volta che lo spazio non è nelle cose, ma è un' intuizione « a priori » che ci permette di stabilire un rapporto fra noi e il mondo esterno, intuizione senza la quale noi non potremmo arrivare alla conoscenza sensibile, Kant osserva che non per questo si deve ritenersi autorizzati a ritenere che lo spazio medesimo sia

qualche cosa d'immaginario, dal soggetto arbitrariamente creato.

Se così fosse « lo spazio del geometra verrebbe ad essere considerato come una semplice invenzione senza validità obbiettiva ». Ma in che modo si potrebbe poi spiegare la strana combinazione che le cose vengono poi a « concordare con l'immagine che noi ce ne facciamo in antecedenza da noi? ».

Che tale d'altra parte sia la sicurezza su cui Kant si basa è anche l'opinione dei più notevoli interpreti del suo pensiero. Il Martinetti nel suo « Commento ai Prolegomeni » (pag. 224-225), alla domanda postasi del come può essere il valore universale e necessario delle proposizioni geometriche, così interpreta: « Ciò avviene — risponde Kant — in quanto lo spazio del matematico e lo spazio nel quale si trovano i corpi sono, in fondo, una cosa sola: lo spazio reale non è un misterioso recipiente a cui lo spirito sia estraneo, ma è una costruzione formale dello spirito conoscente in genere e le leggi che il matematico trova, quando considera questa funzione dello spirito, astrazion fatta dal contenuto che in detta costruzione formale viene ordinato, valgono necessariamente delle cose corporee, perchè queste sono appunto il risultato della costruzione stessa ».

Anche qui, come già nel brano riportato da Kant, dobbiamo distinguere: quello che particolarmente importa all'argomento che stiamo trattando è dato dal primo periodo da cui risulta che lo spazio nostro intuitivo e quello del geometra euclideo sono in fondo *una cosa sola.* Su questa necessità avrà d'altronde il Martinetti a ritornare per conto suo, nello stesso « Commento », quando,

combattendo le conseguenze estreme (la totale convenzionalità del mondo matematico) cui sono arrivati gli esponenti della metageometria (es. Poincaré, Rougier, ecc.) e alcuni fisici che andarono oltre basandosi su di essa (es. Helmholtz) si schiererà risolutamente all'estremo opposto (la nessuna convenzionalità del mondo matematico) accettando senza restrizioni la dottrina kantiana dell'apoditticità dei giudizii matematici, completandola di quelle considerazioni che le scoperte della metageometria hanno ora reso possibile (1). Il Martinetti cioè, sostenendo la completa indifferenza della dottrina kantiana di fronte alle indagini della metageometria, si appoggerà prevalentemente al concetto che qualunque siano per essere le geometrie possibili, tuttavia « uno spazio a tre dimensioni diverso dal nostro, o uno spazio a più di tre dimensioni, non possono venir costruiti che in astratto o simbolicamente rappresentati per mezzo di elementi tolti al nostro spazio » (2).

Il Paulsen (3) pure interpreta che Kant faccia risiedere la validità obbiettiva dei giudizii matematici, anche in quanto « lo spazio in cui la geometria (4) opera la sua costruzione " a priori ", cioè lo spazio della nostra rappresentazione è precisamente lo stesso spazio in cui sono i corpi ».

La relativa chiarezza dell'espressione dipende qui, come si vedrà meglio naturalmente sull'originale, dal non trattare l'A. la questione dal punto di vista problematico della metageometria, ma il significato è lo stesso.

---

(1) *Op. cit.*, pag. 239-242.
(2) Nel *Commento* cit., pag. 240.
(3) F. PAULSEN, *Kant* (tr. it.), pag. 130.
(4) Bene inteso geometria *euclidea*.

§ 16. **L'intuizione spaziale “ a priori ” e lo spazio euclideo.** — È d'altra parte indubitale che Kant così pensasse: soltanto a titolo di definitiva conferma ho in proposito citato il Martinetti e il Paulsen.

È qui facilissimo cadere in errore. Per questo nello svolgimento ulteriore del problema inerente all'intuizione spaziale non mi preoccuperò che di render ben chiaro il mio pensiero, incorrendo eventualmente anche in prolissità apparenti e ripetizioni.

Possiamo frattanto osservare subito come la dottrina kantiana dello spazio da un punto di vista generalissimo (1) è in fondo ammessa anche da coloro che negano l'innatezza e l'invariabilità dell'intuizione spaziale medesima. Ma il problema non ha nemmeno ragione di sussistere nei riguardi di Kant, come fa ad esempio lo Stefanescu in un libro (2) pertanto sotto molti aspetti notevole. Dice lo Stefanescu: « L'idea di spazio quale noi ce la rappresentiamo abitualmente oggi e quale la concepisce Kant è un tutto omogeneo, infinito, continuo, che non ha il suo centro in nessuna parte, dove si possono costruire a volontà figure simili ecc. » (3). E fin qui possiamo anche essere d'accordo: ciò è indubbiamente molto vago e indeterminato, ma risponde a verità.

Ma non ci comprendiamo più quando lo Stefanescu soggiunge: « È una forma “ a priori ”, invariabile, sempre identica a se medesima? No,

(1) Come qualche cosa d'inafferrabile e d'infinito che tutto informa.

(2) M. Stefanescu, *Le dualisme logique* (Paris, Alcan).

(3) *Op. cit.*, pag. 132.

perchè noi sappiamo storicamente ch'essa si è modificata e che essa è ancora possibile di variazioni; a fianco di una geometria euclidea, noi abbiamo delle geometrie non euclidee» e così via di seguito. Prima di tutto noi non possiamo affatto affermare *storicamente* che la nostra intuizione spaziale si sia modificata nel corso del tempo. In secondo luogo non significa proprio nulla l'esempio addotto dell'esistenza di geometrie non euclidee: questo non viene affatto di per sè solo, ad intaccare l'invariabilità della nostra umana intuizione dello spazio. Già Kant aveva preveduto ed ammesso (1).

La questione è ben diversa. Le geometrie non euclidee già esistenti si appoggiano sopra un'intuizione spaziale che certamente non è la nostra fisiologica, ma creazione ipotetica che significa soltanto questo: se noi modificassimo l'intuizione spaziale che è a fondamento della geometria euclidea ben diverse verrebbero ad essere le « verità » ottenute. Questa nuova intuizione dello spazio non è perciò l'effetto di un processo modificatore storico-fisiologico, come lo Stefanescu sembra credere, ma soltanto di una convenzione ipotetica che verrebbe in certo modo a coartare la nostra sensibilità.

Ed ecco affacciarsi qui il punto fondamentale della questione: siamo noi sicuri di quest'identità fra la nostra naturale umana intuizione dello spazio e quello della geometria euclidea che abbiamo mostrato nel paragrafo seguente essere il fondamento indispensabile per accettare senza riserve il valore apodittico del giudizio geometrico come Kant vuole?

---

(1) Cfr. questo libro, Cap. III, § 11, pag. 106.

L'errore della metageometria al riguardo, anche degli esponenti più riservati di essa, è stato quello di affermare senz'altro la totale convenzionalità della geometria euclidea in quanto altre geometrie hanno potuto costruirsi con conclusioni rigorosamente esatte e diverse da quelle della geometria euclidea. Errore, in quanto a tale affermazione si sarebbe potuto arrivare soltanto nel caso che le geometrie diverse dalla geometria euclidea si fondassero sopra un'intuizione dello spazio pure a tre dimensioni: ciò che, sino ad ora, non è stato possibile. Gli studi del Lobatchefski e del Riemann riguardano un mondo diverso da quello della nostra sensibilità e pure inchinandoci ossequienti alle loro ipotesi geniali, non possiamo certo basarci su di esse per intaccare nè l'universalità e necessità dei giudizii nè l'apriorità dei principii matematici, apriorità che d'altronde essi non pongono menomamente in dubbio, almeno considerando l'apriorità soltanto come non empiricità e non come innatezza.

La questione della terza dimensione nella nostra intuizione spaziale si presenta al nostro esame sotto un aspetto *psicologico* e sotto un aspetto rigidamente *geometrico*. Sotto il primo aspetto la questione non fornisce veramente all'attenzione dello studioso elementi tali che ci possano portare a concludere logicamente in un modo o nell'altro: sotto l'aspetto geometrico, senza potere affermare essere la questione medesima molto innanzi, possiamo indubbiamente trovare in esso più solidi punti di appoggio.

È evidente che soltanto dalla fusione degli sforzi concordi di matematici e di psicologi si potrebbe su tal punto arrivare ad una chiarificazione. Ma

ciò si presenta sempre più difficile con la sempre maggiore specializzazione delle singole scienze, la quale, se si è resa necessaria per efficacemente proseguire nel campo del conoscere, ha anche portato disgraziatamente — perchè non confessarlo? — ad una specie di diffidenza fra i cultori di questa o quella disciplina.

Da un punto di vista molto generale, qualche cosa indubbiamente si è fatto nella seconda metà del secolo scorso; ma si mirò allora piuttosto a indagini atte a trovare un metodo, superiore ad ogni sospetto per la sua obbiettività assoluta, onde poter controllare i fenomeni psichici, tanto da poter arrivare alla formulazione di leggi psichiche con metodo matematico (1).

Ma questo movimento, oltre all'essersi mantenuto troppo sulle generali, come si è osservato, per poter avere efficacia diretta sul particolare argomento della terza dimensione che stiamo trattando, presenta anche l'inconveniente comune a tutti gli indirizzi filosofici del genere: l'assoggettare cioè ogni ricerca, anche di carattere metafisico, a un criterio puramente matematico. Ciò porta alla necessità prima di postulare su ipotesi e alla conseguenza inevitabile di dover poi forzatamente far rientrare il tutto quasi in un piano prestabilito.

Quello che abbiamo già accennato nei riguardi di Cartesio e di Spinoza (2) si presenta qui in tutta la sua chiarezza, con l'aggravante della mancanza della grandiosità unitaria della visione sintetica

(1) Cfr. ad esempio: G. TH. FECHNER, *Revision der Hauptpunkte der Psychophysik* (Leipzig, 1882); H. MÜNSTERBERG, *Ueber Aufgabe und Methoden der Psychologie* (Leipzig, 1891).

(2) Cap. I, § 5.

dell'universo preso nel suo complesso, e con la pretesa di adottare, quasi caso per caso, l'applicazione del metodo matematico a ricerche sperimentalmente impostate, come si tende a fare nella moderna psicologia. Specificatasi come scienza particolare, allontanatasi perciò dalla filosofia, della quale non era stata fino allora che un capitolo, non poteva trovare appoggio che in un criterio positivo di ricerca e diventare sopra tutto sperimentale.

Non quindi una collaborazione simile a quella verificatasi fra psicologia e matematica è da auspicarsi per poter approfondire il problema della terza dimensione, perchè essa, più che fusione di sforzi significava incondizionata accettazione di metodo; ma nella collaborazione reciproca dei risultati ottenuti, i quali frutti soltanto dal filosofo potranno essere portati alla loro espressione ultima.

Ciò non essendosi ancora verificato, la questione che ci preoccupa non può sfuggire del tutto, malgrado la buona volontà, ad una certa indeterminatezza.

Cerchiamo perciò di precisare con la maggiore chiarezza possibile il problema: è la nostra intuizione dello spazio identica a quella della geometria euclidea? Sarà in primo luogo necessario stabilire se è in noi la terza dimensione effettivamente innata, a priori.

Facciamo subito notare come la stessa impostazione del problema non intacca nemmeno lontanamente la nostra concezione idealistica della matematica: e che anche qui, nel caso particolare della terza dimensione, come dianzi, nel problema dell'intuizione spaziale più genericamente esaminato, qualunque possa essere la soluzione di esso pro-

blema, anche se affermativa, non nuocerebbe alla tesi che siamo venuti svolgendo in merito al carattere parzialmente ipotetico della geometria: ove la soluzione stessa ci portasse poi a una risposta negativa, la incondizionata sicurezza del giudizio matematico non potrebbe in alcun modo sussistere. È evidente che non si possono ammettere come del tutto innati nell'uomo principii che presuppongono un'intuizione spaziale differente da quella insita nell'uomo medesimo. Noi sappiamo, ad es., che il postulato di Euclide ha valore *soltanto* per uno spazio a tre dimensioni: se il nostro spazio non fosse a tre dimensioni, cadrebbe senz'altro, non già l'apriorità originaria del postulato medesimo, ma certamente il suo valore universale e necessario, dato che la sua obbiettività non sarebbe se non accettando come punto di partenza insindacabile un'ipotesi, che sapremmo già non rispondere a verità, in quanto basata su di uno spazio a tre dimensioni, che non sarebbe già il nostro spazio naturale, ma uno spazio che noi avremmo in certo qual modo preso a prestito.

La questione è, come si vede, di tale natura da avere il suo logico svolgimento in trattati particolari di psicologia o di matematica, a seconda del punto di vista sotto cui essa verrebbe svolta; ma essa è di tale importanza per determinare l'esatta posizione della geometria nella teoria della conoscenza, che qualche delucidazione è qui necessaria. Necessità tanto per i filosofi, onde essi non si chiudano in una rigidezza non sempre giustificata dinnanzi alle indagini della scienza moderna e sopra tutto alle indagini svolte in questo campo particolare; quanto, e più sensibilmente ancora, per i matematici e i fisici del nuovo indirizzo metageome-

trico, i quali, male interpretando la dottrina di Kant, credettero di ravvisare nella sola possibilità di concepire una geometria diversa da quella euclidea, il tallone d'Achille della dottrina medesima, meritandosi così il biasimo di quei filosofi che vedono nelle loro argomentazioni e ricerche una specie di circolo vizioso in quanto queste « presuppongono già tutte quella costituzione particolare del mondo dell'esperienza che se ne vorrebbe derivare » (1).

Così non possiamo passare sotto silenzio che un matematico come il Poincaré venga proprio a concludere che la nostra intuizione dello spazio differisce da quella di Euclide, che presuppone una omogeneità ed un'isotropia che non possiamo in alcun modo — reputa almeno il Poincaré — riscontrare naturalmente nella nostra (2). Tale constatazione esce forse dal campo puramente matematico per coinvolgere, come si vede, una questione psicologica; ma i due aspetti del problema sono fra loro talmente connessi, che mal si potrebbe trattarli in modo del tutto indipendente l'uno dall'altro.

È doveroso inoltre riconoscere che tutti questi

(1) V. il *Commento* di Martinetti ai *Prolegomeni*, pag. 241.

(2) Analogamente L. Rougier, *La Philosophie géométrique de Henri Poincaré*, pag. 100. Il Rougier aggiunge a favore della relatività dello spazio (oltre all'omogeneità e all'isotropia) altre due prerogative, e cioè: il non comportare lo spazio alcuna grandezza assoluta e l'essere « amorfo ». Come si vede però questi ultimi due non sono caratteri differenziali o per lo meno ammessi come differenziali fra il nostro spazio e quello della geometria euclidea, ma sono unicamente in appoggio alla relatività generica di ogni intuizione spaziale, concetto che la filosofia ha già fatto suo da un pezzo. La teoria del Poincaré su tale problema più generale troverai in: *La relativité de l'espace* (*L'Année psychologique,* XIII, 1907, 1, 17).

matematici — e ciò sia detto a loro onore — nelle loro ansiose ricerche, spingono queste al di là della stretta cerchia tecnica in cui potrebbero contenerle e che le complesse e molto spesso vacillanti dottrine della fisiologia non li spaventano. In tal modo accade ad es. di esprimersi al Poincaré (1), dopo avere affrontato l'aspetto fisiologico del problema: « Se così fosse, se una sensazione muscolare non potesse nascere se non accompagnata da questo sentimento geometrico della *direzione,* lo spazio geometrico sarebbe allora veramente una forma imposta alla nostra sensibilità », parole che ci ricordano quelle del James: « Il senso muscolare non ha un ufficio notevole nella generazione delle nostre sensazioni di forma, direzione », ecc. (2).

Così non possiamo passare sotto silenzio che uno psicologico come lo stesso James, pure concludendo per conto suo che la terza dimensione « forma un elemento originario di tutte le nostre sensazioni spaziali » (3), riconosca tuttavia notevolissimo valore alla posizione opposta assunta dalla maggior parte degli psicologi e che sia costretto a riconoscere egli stesso che indubbiamente il concetto della terza dimensione non può essere senz'altro accettato come quello delle altre due dimensioni (4).

Nè si deve dimenticare come ben prima di tutto ciò, il Berkeley considerasse la distanza come data

---

(1) V. *La science et l'hypothèse,* pag. 73 segg.

(2) W. James, *Psicologia* (tr. it.), pag. 355.

(3) *Op. cit.*, pag. 357.

(4) Il Vaissière, senza trattare particolarmente la questione, ha un'eccellente espressione per indicare l'insufficienza della vista per determinare, anche soltanto fisiologicamente, la distanza: « Nous nous servons de nos lignes visuelles comme l'aveugle se serve de son baton ». V. *Psychologie Expérimentale,* pag. 78.

in noi puramente in modo tattile, distinguendola così dalle altre sensazioni spaziali, proprie invece sopra tutto dell'organo visivo.

Le prove fatte sui ciechi nati, di cui ci parla la psicologia sperimentale, possono indubbiamente far pensare, far dubitare che nel loro complesso le figure geometriche non possono essere concepite — malgrado la pretesa evidenza innata della *definizione* — da un cieco nato. L'esempio che il James riferisce, a proposito di tutt'altro argomento, dell'esperienza del dottor Franz è quanto mai significativo per il problema che stiamo esaminando: un giovane, cui il dottor Franz diede la vista togliendogli la cataratta, posto dinnanzi a delle figure geometriche, ebbe a dichiarare « che queste non sarebbero state affatto capaci di dargli l' idea di un quadrato o di un circolo se egli non avesse percepita, sulla punta delle dita, la sensazione di ciò che ora vedeva come se toccasse realmente gli oggetti » (1).

Riconosco perfettamente che tali allusioni e tali esempi hanno in fondo un valore puramente relativo, in quanto altri esempi si potrebbero portare contro questi ed esempi forse di non minore valore. Così degno di nota, come argomentazione contraria all'esperienza del dottor Franz, è indubbiamente il caso di quel matematico Saunderson che riuscì a costruire, ci dice il Mach, un sistema geometrico intelligibile anche per chi vede, pure essendo nato e rimasto cieco. E su questo come su altri esempii si potrebbero svolgere considerazioni che potrebbero eventualmente portarci a conclu-

(1) James, *op. cit.*, pag. 309. Il James lo riporta trattando dell'immaginazione.

sioni opposte a quelle cui sembrerebbe doversi necessariamente arrivare basandoci soltanto sulle prime da noi dianzi esposte (1).

§ 17. **La teoria del Poincaré sulla III dimensione.** — Ben diverso risultato possiamo invece conseguire esaminando la questione della terza dimensione nel pensiero dei matematici; innanzi tutto, per la più precisa impostazione del problema; in secondo luogo perchè il problema medesimo è da loro direttamente trattato e non soltanto incidentalmente com'è nei libri di psicologia e di fisiologia. Le osservazioni dei pensatori matematici al riguardo hanno indubbiamente valore notevole per il rigore del procedimento. Decisive sarebbero, ove dovessimo accettarle senza obbiezioni, le differenze che il Poincaré — per non prendere che l'esponente più insigne di tale corrente

(1) Il caso del cieco nato Saunderson dà al Mach l'occasione di uscire in notevoli considerazioni inerenti al senso della vista nella nostra intuizione spaziale, ma esse soltanto molto indirettamente potrebbero riguardare il problema particolare che c' interessa, e precisamente soltanto nei limiti dello spazio fisiologico, che potrebbe avere attinenza con quanto sopra soltanto per mostrare se la terza dimensione debba in noi ritenersi alla stessa stregua delle altre, oppure se essa sia stata acquisita in seguito o comunque circoscritta soltanto ad alcuni organi di senso. Può in ogni modo interessare quanto la fisica, in senso rigoroso, pensi sull'argomento. Il Mach ne tratta, per quanto io sappia, segnatamente in: *La connaissance et l'erreur* (cap. XXII, *Le temps et l'espace en physique*), *Analisi delle sensazioni* (cap. VI, *Sensazioni spaziali nella vista*; nonchè nei cap. IV, VII, X dello stesso libro), e inoltre in uno studio particolare: *Sull'effetto fisiologico degli stimoli di luce distribuiti nello spazio.* Si troverà in tali svolgimenti anche una scelta bibliografia, per quanto limitata ai soli autori che il Mach combatte o sui quali si appoggia.

— ha creduto di poter affermare fra la nostra naturale intuizione spaziale e quella che serve di presupposto necessario alla geometria euclidea: e ciò non tanto riguardo alle particolarità dell'omogeneità e dell'isotropia che sono in questa e non sarebbero in quella, dato che esse mi sembrano di ben difficile determinazione, quanto nell'affermazione che il Poincaré non esita a fare riguardo alla pura e semplice convenzionalità, comodità — per usare la sua precisa parola — delle tre dimensioni del nostro stesso spazio naturale.

Noi abbiamo già con sufficiente ampiezza mostrato come Kant e i filosofi che direttamente a Kant si riconnettono sull'argomento, ritengono essi medesimi indispensabile che, per il valore incondizionato della loro dottrina, la nostra intuizione dello spazio sia, appunto, a tre dimensioni: donde il valore grandissimo di tale teoria del Poincaré.

Ma riesce egli nel suo scopo? Non mi pare.

Da un punto di vista filosofico (idealistico) le sue acutissime considerazioni sullo spazio non presentano il minimo interesse specifico; non presentano cioè che quell'interesse generico che qualunque dottrina scientifica offre allo studioso; ma da tale dottrina esce illesa la teoria kantiana della natura aprioristica della nostra intuizione spaziale e del numero delle sue dimensioni.

Precisiamo meglio. La dottrina del Poincaré sullo spazio è una nuova conferma — ove ce ne fosse stato bisogno — della sua mente straordinariamente aperta ad afferrare l'intima essenza delle cose e non già soltanto la loro veste apparente; dote questa — è dolorosa ma necessaria constatazione — che non è molto frequente negli scienziati, nemmeno fra i più insigni di essi; ma

essa dottrina ci rivela altresì una mediocrissima conoscenza del pensiero di Kant.

Vediamo di esporre tale dottrina almeno nelle sue linee essenziali e sotto il suo aspetto particolare, veramente originale questo, del come sia sorta nella geometria euclidea la concezione di uno spazio a tre dimensioni.

Ponendosi nettamente il problema: che cosa intendiamo noi dire parlando di dimensioni dello spazio (1), il Poincaré vede la necessità di arrivare prima che al concetto di dimensione al concetto di divisione di un « continuo ». Che cosa si debba intendere per « continuo » fisico l'A. ha già mostrato in « La Science et l'Hypotèse » e mostra nuovamente in « La Valeur de la Science »: possiamo avere l'idea di un continuo fisico tutte le volte che noi siamo capaci di distinguere due impressioni l'una dall'altra, senza che queste possano alla loro volta essere distinte da una terza intermedia. Gli esempii sono numerosissimi in ogni nostra sensazione, ma per non uscire dal campo prescelto e per adottare l'esempio dell'A., possiamo pensare a due oggetti leggerissimi A, C, di cui il peso di $A = 10$ grammi, il peso di $C = 12$ grammi. Una mano un po' esercitata può distinguere che A è più leggiero di C; ma se noi prendiamo un altro oggetto B che pesi 11 grammi, ecco che quella stessa mano non distinguerà B nè da A nè da C. Da cui si verrebbe a ricavare:

$$A = B,\ B = C,\ A < C$$

(1) Cfr. anche l'articolo del Poincaré: *L'espace et ses trois dimensions* (*Revue de méthaphysique et de morale*, 1903, pag. 281-301, 407-429).

conclusione di cui è evidente l'assurdo. Nè miglior risultato noi avremmo se invece di fidarci della mano esercitata, adoperassimo la più perfezionata delle bilance. Si verrebbe pur sempre a concludere in una contraddizione anche se i termini di essa sarebbero infinitamente più vicini che non A con B e B con C nell'esempio citato.

Tale contraddizione è stata tolta con l'introduzione del continuo matematico, ed appunto per intendere questo ci siamo rifatti al continuo fisico: « C'est l'esprit seul » dice giustamente il Poincaré, che può risolvere la contraddizione medesima (1).

Ma che cosa ha a che vedere con tutto ciò il numero delle dimensioni dello spazio? Innanzi tutto « che cosa vogliamo dire quando diciamo che un continuo matematico o un continuo fisico ha due o tre dimensioni? » (2). Continuando nell'esempio citato e introdotta una distinzione non soltanto fra A e C, ma anche fra A e B e fra B e C contrariamente a quanto ha potuto rivelarci la sola esperienza bruta, si potrà sempre considerare una serie di elementi E_1 E_2....... E_n, i quali siano fra A e B e tali che ciascuno di essi non sia distinguibile da quello immediatamente precedente o susseguente, così:

$$A = E_1, \; E_1 = E_2 \ldots\ldots \; E_n = B$$

da cui risulta che l'assurdità della serie precedente non è stata in fondo che differita. Per venirne alla soluzione siamo perciò costretti a introdurre un nuovo elemento, puramente astratto questo e che il Poincaré chiama « la notion de *coupure* ». Tale

(1) *La Valeur de la Science,* pag. 70.
(2) *Op. cit.*, pag. 70.

nozione, lo dice il suo stesso nome, ci permetterà di supporre che questa ininterrotta serie d'identità parziali non sia: ciò ci permetterà di prendere in esame qualcuno degli elementi di *C*, cosa che non avremmo potuto fare continuando a vedere in *C* un continuo ininterrotto. Tali elementi che prendiamo ad esaminare potranno essere o tutti distinguibili gli uni dagli altri, o formare essi stessi uno o diversi continui. Tali elementi così arbitrariamente considerati sono appunto le « coupures » del Poincaré: esaminiamo allora di nuovo con tale criterio arbitrariamente ottenuto il continuo *C*. La differente situazione creata ci permetterà di distinguere due nuovi casi, i quali passiamo ad esaminare, osservando però che gli elementi della serie *E* introdotti nel continuo *C*, continuano come prima a rispondere ai due requisiti di appartenere tutti a *C* e che ciascuno di essi non è distinguibile da quello immediatamente susseguente o precedente.

I due nuovi casi sotto i quali le « coupures » possono presentarcisi sono questi: 1° che esse siano tutte distinguibili da tutti gli elementi della serie *E*; 2° che una di esse non sia distinguibile da uno degli elementi *E*. Nel primo caso *C* resterà sempre un continuo ininterrotto; nel secondo *C* sarà *diviso*.

Siamo venuti così a introdurre una nuova nozione: quella di *divisione*. Essa, come già la « coupure », ci porterà ad esaminare due altri casi: 1° di considerare per divisione di un continuo delle « coupures » date da elementi tutti fra loro differenti e allora il continuo sarà a *una dimensione*; 2° di considerare per divisione di un continuo che le « coupures » debbano alla loro volta

formare esse stesse uno o più continui, e allora il continuo base sarà a *più dimensioni*.

E ancora, ultima distinzione, se adottiamo quest'ultima ipotesi (« coupures » di un continuo che formano altri continui) e i continui che ne risultano sono tutti a una dimensione, il continuo *C* sarà allora a *due* dimensioni, se invece i continui che ne risultano sono a due dimensioni, il continuo *C* sarà a *tre* dimensioni (1).

Come si vede tutta la teoria del Poincaré per arrivare al concetto di dimensione, è una successione di *definizioni*. È quindi necessario che, perchè esse siano accettate per lo svolgimento della sua tesi, corrispondano al procedimento per il quale nella geometria euclidea si è venuto introducendo il concetto dello spazio a tre dimensioni. Ed effettivamente la concezione è la stessa : le « coupures » in questo caso introdotte per la divisione dello spazio sono la superficie, la linea e il punto (2).

Posta così la nozione di spazio, il Poincaré passa ad esaminare il caso specifico della terza dimensione in genere, non vedendo perchè mai si dovrebbe attribuire valore diverso da quello di semplice convenzione utilitaria alla intuizione spaziale a tre dimensioni. Noi verremmo così a seguire l'A. in considerazioni e constatazioni molto dotte, di natura queste prevalentemente fisiologica, dalle quali si dovrebbe dedurre che, se il processo della

(1) Ho cercato di esporre tale teoria del Poincaré il più brevemente e chiaramente che mi è stato possibile corredando incidentalmente la stessa (esposta in *La Valeur de la Science*, cap. III) con altri pensieri e concetti dallo stesso A. svolti in altre sue opere e segnatamente in *Sc. Hyp.* e in *Science et Méthode*.

(2) Cfr. Poincaré, *La Valeur de la Science*, pag. 74 segg.

sensazione non si verificasse in noi nel modo noto, ecc. noi non avremmo già uno spazio a tre dimensioni, ma di un altro numero di dimensioni, numero variabile a seconda delle diverse ipotesi.

§ 18. **Critica della teoria precedente.** — Tutte queste considerazioni del Poincaré sia per quello che riguarda la teoria della nozione di spazio, la quale abbiamo ritenuto opportuno di esporre in quanto essa presenta indubbiamente dei lati profondamente originali; sia per quello che riguarda le deduzioni che egli crede di poterne trarre, per le quali rimandiamo alle sue opere ritenendole note nelle loro linee essenziali, cadono di fronte a una sola obbiezione (1) di una semplicità estrema, questa: tali argomentazioni avrebbero valore decisivo anche rispetto alla dottrina kantiana ed anche all' idealismo gnoseologico — sotto questo aspetto convergenti — se l'una e l'altro non avessero già detto ciò; non avessero già dimostrato cioè che lo spazio è per essi la pura forma della sensibilità; non riguardare cioè esso in alcun modo la verità assoluta.

Il venire a dirci, come fa il Poincaré, che ove in noi non si verificasse una certa sensazione di

(1) L'obbiezione medesima ha naturalmente valore anche per la teoria del matematico francese riguardo alla nozione del tempo, che qui non abbiamo considerato per maggiore brevità e semplicità: la concezione idealistica del valore del giudizio matematico non ha nulla a soffrire di ciò; il tutto potrebbe facilmente essere esteso anche riguardo all' intuizione temporale, che non presenta, da un punto di vista gnoseologico, alcuna differenza essenziale con quella spaziale. In *Sc. Hyp.* il Poincaré conclude esplicitamente a un errore di Kant: meno esplicitamente, ma tuttavia in modo non dubbio. V. *La Valeur de la Science*, II.

convergenza in due sensazioni visive, che dovrebbero in certo qual modo mantenersi separate e che tali specie di sensazioni di convergenza — l'espressione è fisiologicamente alquanto discutibile, ma ciò non conta per quanto andiamo osservando — sia a sua volta sempre accompagnata — l'esperienza almeno ce lo conferma — da una stessa sensazione di *accomodamento*, noi avremmo una intuizione dello spazio non più a tre, ma a quattro dimensioni (1), non intacca affatto Kant e quello che una corrente idealistica derivata dal criticismo kantiano hanno già posto chiaramente in luce da un pezzo: essere cioè l'intuizione dello spazio unicamente inerente alla realtà come è in natura (sensibile) e non come dovrebbe essere (razionale). Certo un « dover essere » c'è già nella conoscenza sensibile, più ancora in qualunque percezione, e c'è già proprio per la funzione del tempo e dello spazio. Ma tale funzione ben lungi dal poterci dare il dover essere che appaghi la nostra ragione, si limita a far sentire al nostro pensiero il bisogno appunto di una più profonda sintesi verso una più definitiva realtà come Hegel ci ha mostrato.

Contrariamente quindi a quanto il Poincaré stesso e molti suoi seguaci — come ad es. Luigi Rougier (2) — e non pochi fisiologi illustri che si sono occupati direttamente della questione — come ad es. l'Helmholtz (3) —, la teoria del matematico

(1) Cfr. *La Valeur de la Science*, pag. 90 segg.

(2) L. Rougier, *La Philosophie géométrique de H. Poincaré*, Paris, 1920. V. pure ad opera di diversi matematici di questa scuola (V. Volterra, I. Hadamard, P. Langevin, P. Boutroux), il notevole volume: *Henri Poincaré, l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique*.

(3) H. Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, II.

francese segna al riguardo la prova che la scienza dà di una precedente speculazione filosofica, com'è d'altra parte logico che sia. Ma ciò non può autorizzare alcuno a concludere che « tutto ciò che noi possiamo dire è che l'esperienza ci ha appreso che è comodo attribuire allo spazio tre dimensioni ».

La conclusione va bene al di là dei risultati ottenuti: basandoci rigorosamente su di essi noi possiamo, oggi, soltanto concludere che l' intuizione dello spazio a tre dimensioni è l'unica possibile per l'uomo nel mondo nel quale esso vive. Per questo e nel primo capitolo e nel secondo non mi sono mai stancato di ripetere a sazietà che l'aritmetica e la geometria dovendo basarsi esclusivamente sulle forme proprie della conoscenza sensibile (tempo e spazio), non possono e non potranno mai assurgere alla ricerca della verità assoluta, concezione questa che la metageometria contemporanea ha creduto essa di scoprire, mentre invece era già una constatazione da lungo tempo — da Kant — acquisita incrollabilmente.

La reale importanza che la metageometria presenta per il filosofo, non già in quanto essa abbia originato il problema, ma certo in quanto ai tentativi di soluzione di questo ha portato notevole contributo, è unicamente questo: hanno le verità matematiche, condizionatamente alla conoscenza sensibile, valore universale e necessario? Tale problema si è appunto trattato specificatamente nel terzo capitolo: per la soluzione di esso ho creduto di poter prospettare la tesi di un tendere, di un divenire della matematica ad essere tale espressione — che è precisamente il suo « dover essere » — ma che, contrariamente a Kant, penso

che la matematica non ha ancora raggiunto e mai potrà raggiungere se non ritornando in certo qual modo sul cammino percorso, compiendo quell'opera di riflessione sull'ampia messe di risultati raccolti, senza preoccuparsi di estendere ancor più il proprio campo conoscitivo, il che non potrebbe fare se non introducendo ognor più nuovi postulati. In poche parole: limitando o per lo meno non estendendo il proprio dominio e preoccuparsi piuttosto di rafforzarlo, come in parte essa sta già facendo riguardo al calcolo infinitesimale (1).

§ 19. **La possibilità di più geometrie basantesi su di una stessa intuizione spaziale.** — Perciò, anche se dovessimo rispondere affermativamente alla domanda postaci inerente all'essere o non la nostra intuizione « a priori » dello spazio a tre dimensioni, non per questo si dovrebbe dedurre essere la geometria euclidea la sola possibile (come vuole Kant), la sola incondizionatamente vera o, se si vuole, più vera di altre eventuali geometrie future esse pure basate su di uno spazio a tre dimensioni.

(1) È quindi in linea di massima accettabilissima (da un punto di vista puramente gnoseologico, bene inteso) quella teoria fisiologica del De Cyon, che vi siano cioè organismi il cui spazio sia a due od anche ad una dimensione. Ciò indipendentemente dalla giustezza dell'affermazione categorica del De Cyon che il numero delle dimensioni dello spazio corrisponde esattamente al numero dei canali semicircolari dell'organismo; affermazione che il Poincaré si preoccupa di combattere appoggiandosi alla teoria Mach-Delage. Ma questi ultimi sono particolari che in nessun modo possono interessare la questione dal punto di vista gnoseologico: è importantissimo invece per noi porre in luce come il numero delle dimensioni dell'intuizione spaziale — dipenda esso numero da questo o da quello — è problema fisiologico. Modificate l'organismo e potrà essere modificata anche l'intuizione spaziale, quindi relatività in ogni nozione che con lo spazio ha a che fare.

Formuliamo nettamente il nuovo problema: si possono teoricamente ammettere due geometrie, entrambe a tre dimensioni e che pertanto differiscono fra loro? Credo di sì. Le geometrie del Riemann e del Lobatchefski poggiano l'una e l'altra su di un'intuizione spaziale a due dimensioni e pertanto differiscono così sensibilmente fra foro che alcune proposizioni della geometria del Riemann arrivano a conclusioni diverse da quelle del Lobachefski: nella geometria del primo ad es. la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti; nella geometria del secondo tale somma è invece minore di due angoli retti. Lo stesso dicasi anche per le verità assiomatiche: valga per tutte il postulato d'Euclide, posto dalla geometria del Riemann in modo tanto diverso da quello della geometria del Lobatchefski.

Pertanto, senza andare troppo lontano in considerazioni puramente matematiche, noi possiamo a buon diritto affermare che non vediamo per quali ragioni noi non potremmo arrivare, in un avvenire più o meno prossimo, a concepire una geometria diversa dalla euclidea e tuttavia basata su di un presupposto spaziale a tre dimensioni. Che cosa questo ci porterebbe a concludere?

Ci porterebbe a concludere dell'esistenza in conflitto di due diverse geometrie che si baserebbero entrambe su di uno spazio a tre dimensioni, dello stesso numero di dimensioni cioè su cui la nostra naturale intuizione spaziale è pure basata; ossia che quella ragione fondamentale che si era riconosciuta necessaria e non sufficiente per poter sostenere incondizionatamente la dottrina matematica di Kant, in quanto essa sostiene che l'unica geometria possibile è per noi quella di Euclide — e

cioè l'identità del nostro spazio con quello euclideo — non ha più la stessa importanza perchè l'identità medesima verrebbe eventualmente a sussistere con un terzo fattore, e — perchè no? — magari con infiniti altri fattori, dato che non è nemmeno da escludersi che non una, ma infinite geometrie non euclidee si possano inventare su di una intuizione spaziale a tre dimensioni.

Tutti elementi questi che ci porterebbero naturalmente ad affermazioni ben diverse, per risolvere le quali, in omaggio al principio di contraddizione, saremmo costretti ad ammettere una differenza essenziale nei punti di partenza, dato che soltanto nelle differenze insite in essi noi potremmo trovare la spiegazione della diversità delle conseguenze dedottene.

In tal caso quale di queste geometrie corrisponderebbe a quella che secondo Kant sarebbe in certo qual modo innata in noi? Perchè mai proprio quella euclidea? Confesso per conto mio di non vederne le ragioni.

Non ne vedo le ragioni appunto perchè i principii fondamentali sui quali la nostra geometria si basa non sono tutti spogli di ogni carattere ipotetico. Quest'ultima considerazione viene a chiarire, credo ormai senza possibilità di equivoco, la grande importanza da me attribuita in tutto lo svolgimento di questo saggio, e segnatamente al cap. III, di una distinzione fra l'*essere* e il *dover essere* della matematica. Questo dover essere soltanto può rappresentare la verità universale e necessaria del giudizio matematico — sia pure sempre condizionatamente alla conoscenza sensibile non fosse altro per la necessità della matematica di agire nel tempo e nello spazio — che Kant crede in-

vece si debba senz'altro ravvisare in esso. Questo valore universale e necessario non si deve invece vedere nel giudizio matematico se non quando ogni parvenza d'ipotesi sarà totalmente bandita dai suoi principii fondamentali; quando cioè basandoci sulla terminologia qui adottata, tutte le proposizioni matematiche non saranno costituite che da assiomi o verità rigorosamente dedotte da tali assiomi.

Ma, poichè siamo obbligati a riconoscere un valore convenzionalmente ipotetico — e ciò contrariamente a Kant e conformemente ai matematici puri — nei postulati, quale ragione sufficiente possiamo noi avere per negare la possibilità di altre ipotesi che ci possano portare a conclusioni differenti, e ciò senza che le ipotesi medesime — chè allora il fatto già si è verificato nelle geometrie del Lobatchefski e del Riemann — abbiano bisogno di appoggiarsi su di un'intuizione spaziale non a tre dimensioni?

§ 20. **Conclusione.** — La trattazione del lato puramente tecnico, matematico della questione, non deve peraltro portarci troppo lontani dal nostro punto di vista, che crediamo di poter ora con maggiore autorità di prima riassumere nel modo seguente:

a) Le proposizioni matematiche, comunque si possano considerare, non hanno importanza che per la conoscenza sensibile, ossia per una conoscenza che è qualitativamente inferiore a quella cui mira la nostra ragione.

b) Le proposizioni matematiche sono basate su principii « a priori », e procedono prevalentemente per intuizione.

c) Le proposizioni matematiche tendono ad avere per *b*) e condizionatamente per *a*) valore universale e necessario. Malgrado tale valore esse non abbiano ancora raggiunto, esse si possono pur sempre considerare come la più alta e sicura espressione della nostra conoscenza sensibile.

d) La metageometria, ben lungi dal poter essere considerata come un ostacolo per l'idealismo gnoseologico, è una nuova conferma (d'altra parte non necessaria) del procedimento astratto della scienza tipica per eccellenza. Inalterata resterà la posizione della metageometria al riguardo, qualunque potranno essere per l'avvenire le scoperte della metageometria medesima.

Qualunque infatti possa essere il valore delle nostre considerazioni che ci hanno portati a queste conclusioni; più ancora, qualunque possano essere i risultati che l'avvenire può riserbare alle più coraggiose indagini, l'interpretazione idealistica della matematica non può essere scossa.

Restano come verità definitivamente acquisite al pensiero idealistico la necessità della fonte aprioristica di ogni cognizione che intenda veramente esser tale e non subire a volta a volta le mutevoli influenze della fonte empirica. Resta la necessità, maggiormente posta in luce oggi dalla metageometria — che tutto sommato ha portato più elementi a favore che contro la dottrina dell'apriorità kantiana — che il tempo e lo spazio essendo forme conoscitive puramente condizionate alla nostra sensibilità, tutte le scienze particolari, che necessariamente su di esse debbono basarsi — le matematiche non escluse —, non possono darci altre verità se non quelle aventi valore relativamente a noi in quel momento ed in quel luogo.

Non mi si fraintenda: in quest'ultima espressione non deve per nulla affatto figurare alcuna traccia dell'antico soggettivismo kantiano, dallo idealismo moderno definitivamente sepolto. Il relativismo della nostra conoscenza scientifica condizionata a quel momento e a quel luogo, è tale unicamente rispetto al sapere logico, al pensiero puro: per il soggetto conoscente è, nelle sue particolari condizioni, l'unica verità possibile, verità per lui sommamente obbiettiva; ma nello stesso modo come noi accettiamo per assoluta verità quanto noi sentiamo nel sogno, nell'illusione e nell'allucinazione: la differenza consiste soltanto nella possibilità o non del controllo sperimentale.

Da queste conclusioni delle quali soltanto *c*) può essere passibile di discussione, possiamo dedurre che la nostra indagine conoscitiva non può limitarsi alle scienze, nemmeno alla più pura fra esse, ma sia necessario andare oltre queste nel tendere verso una verità incondizionatamente vera, verso quella verità qualitativamente superiore che Kant, indipendentemente dalla matematica, ci nega nel campo gnoseologico e ci dà nel campo morale.

A Kant resta senza dubbio il merito massimo di aver rivolto la nostra attenzione sulla formazione e l'incalcolabile portata dell'attività sintetica della nostra intelligenza in ogni più semplice processo conoscitivo, e di aver additato quasi imperiosamente la via da seguire al susseguente idealismo; ma questo, insofferente dei limiti misteriosi ed opprimenti della cosa in sè, guida la ricerca del pensiero, sempre più sicuro di se stesso, sempre più audace, verso la più lontana mèta della conoscenza razionale.

APPENDICE (1)

(1) È una *Comunicazione* che tenni al V Congresso Internazionale di Filosofia (Napoli, 5-9 maggio 1924). Credo opportuno pubblicarla in fine al mio studio, perchè essa potrà forse essere di ausilio nei riguardi dell'interpretazione dei numerosi passi in cui accenno alla concezione della matematica nella filosofia di Kant.

Le note dell'*Appendice* figurano anche nella *Comunicazione*: sono state però qui completate con riferimenti a questo volume.

La dottrina matematica di Kant nell'interpretazione dei matematici moderni.

Introduzione. — La discussione inerente alla concezione della matematica quale si può ricavare segnatamente dalla « Critica » e dai « Prolegomeni » ha avuto in questi ultimi tempi una recrudescenza particolare: ciò, è doverosa constatazione più per merito dei matematici che per merito dei filosofi.

Due sono gli aspetti fondamentali che è andata assumendo la polemica stessa: il primo, di data più antica, discende direttamente da Gauss e ha incontrato sempre più fortuna con la sicurezza dell'indimostrabilità del V postulato, la quale portata già a rigorosa concretezza nel '735 da Gerolamo Saccheri, passa con il Lobatchefski da pura e semplice constatazione negativa ad organica costruzione positiva. Questa corrente, sempre più perfezionatasi sotto l'aspetto critico attraverso Riemann, Beltrami, Bonola, Poincaré e i suoi numerosi e valorosi seguaci, è venuta oggi a costituire, più che un indirizzo particolare, una nuova scienza: la metageometria.

Un secondo aspetto — recentissimo — è rappresentato dalla riforma della logica matematica iniziatasi in Italia con il Peano (« Formulario matematico »), completata in Inghilterra dal Russel (« The Principles of mathematics »), seguita entusiasticamente in Francia dal Couturat (« Les principes des mathématiques »), ha trovato al suo nascere non pochi oppositori fra gli stessi matematici. Per maggiore comodità e chiarezza chiamerò questo secondo

indirizzo con la parola di *logistica* che il Couturat consiglia e alla quale contemporaneamente a lui erano addivenuti Itelson e Lalande, indizio che depone indubbiamente a favore della bontà del vocabolo prescelto, come il Couturat stesso ebbe a constatare al Congresso di Ginevra (1904).

***

Questi sono i due aspetti fondamentali che ha assunto la polemica contro la concezione matematica nella dottrina kantiana. Vi sono però matematici — e sono la maggior parte — che senza rientrare direttamente nè nell'una nè nell'altra corrente — in quanto non hanno assunto nei riguardi della metageometria una posizione decisa, e mostrano una certa diffidenza per la logistica — si trovano in ogni modo d'accordo nella critica dei principii kantiani, condizionatamente almeno alla loro disciplina. Per meglio intendersi posso specificare che uno di questi matematici è lo Young. Nella traduzione italiana della sua opera « I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria », per quanto essa sia ricca di osservazioni acute e miniera inesauribile di dati bibliografici, a pag. 61-63 si allude alla dottrina matematica kantiana in modo che non si può fare diversamente di chiamare .....ameno. Nè fra gli Italiani è da dimenticarsi lo stesso Vailati, studioso pertanto di non dubbia dottrina, che non soltanto — sempre nei riguardi di Kant — peccò nell'interpretazione, ma anche nella forma in quanto uscì pure in espressioni non corrette a riguardo del maestro e dei neo kantiani, ai quali poi — non so proprio con quale fondamento — attribuisce di essere i dominatori nella filosofia ufficiale dei varii paesi, plaudendo perciò al Couturat che contro tale indirizzo seppe assumere, almeno in Francia, posizione di attacco (1).

(1) *Scritti*, pag. 709, 727, ecc.

Malgrado il Vailati le « oche del Campidoglio kantiano » non accennano a diminuire sopratutto nei riguardi della sua allusione all'articolo del Couturat su « La Philosophie des mathématiques de Kant » pubblicata sulla « Revue de Métaphysique » nel 1904 a commemorazione del centenario della morte del filosofo tedesco.

Un esame un po' più particolareggiato, breve quanto si vuole, è qui necessario.

Metageometria. — Per quanto ha attinenza alla metageometria la polemica si appunta fondamentalmente sull'intuizione dello spazio, e, dovendo, per esigenza di tempo, restringere al massimo questi appunti, si può precisare meglio limitando la questione medesima alle tre dimensioni dello spazio, che effettivamente Kant pone come insindacabili, quasi non vi fosse già ai suoi tempi la questione ad esse dimensioni inerente. Un punto ci rivela esplicitamente il pensiero di Kant al riguardo: lo troviamo nei « Prolegomeni » (§ 12); in quel paragrafo cioè che nelle intenzioni di Kant avrebbe dovuto avere ben più modesta funzione che non quella che venne ad assumere in seguito con le decisive affermazioni della metageometria e col nuovo carattere assunto dalla questione delle dimensioni dello spazio. Il § 12 non era altro infatti, nel conseguente sviluppo della dottrina kantiana, che l'enunciazione di esempi a conferma della parte teorica esposta nei paragrafi precedenti, del carattere « a priori » dell'intuizione dello spazio, nello stesso modo come il § 13 non ci darà altro che esempi a conferma della funzione puramente formale dello spazio medesimo.

Tale § 12 può invece essere oggi considerato nei riguardi della metageometria come il più controverso: dice Kant « che lo spazio perfetto (quello che non è più soltanto il limite di un altro spazio) abbia tre dimensioni e che lo spazio in genere non possa averne di più si fonda sulla proposizione che in un dato punto possono tagliarsi ad angolo retto tre sole rette ». In altre pa-

role: lo spazio nostro ha tre dimensioni e tale constatazione noi la possiamo fare soltanto basandoci su di un principio « a priori ».

L'affermazione è esplicita e non può dar luogo a duplice interpretazione: è questo uno dei punti in cui Kant rivela più palesemente la sua imperfetta conoscenza delle matematiche, imperfetta conoscenza che si è d'altra parte a più riprese esagerata, e che in modo molto più significativo possiamo riscontrare in altri filosofi che si sono interessati di matematica senza che pertanto siano incorsi nelle ire dei tecnici. Certo però non è passibile di giustificazione che Kant così poco sapesse di Lambert di non essersi ricordato di lui quando scriveva, con assoluta tranquillità, le poche righe sopra riportate.

Soltanto, se il punto di partenza delle obiezioni dei matematici è giusto, sono errate le conseguenze ultime. Kant si limita a dirci che lo spazio nei suoi rapporti con la nostra sensibilità ha tre dimensioni, il che non vuol dire che non si possano artificiosamente costruire tanti spazi a tante dimensioni quante si vogliono. La metageometria non ha perciò portato alcun colpo mortale alla dottrina kantiana dello spazio, non già soltanto nei riguardi della sua apriorità considerata in senso generico, ma nemmeno nel punto particolare del numero delle dimensioni di esso spazio. Un colpo grave sarebbe stato invece se si fosse dimostrato che è falso che l'intuizione spaziale propria di qualunque processo conoscitivo umano non è a tre dimensioni, o, se possibile, pur essendo a tre dimensioni, queste non sono quelle della geometria euclidea.

La questione si presenta sotto due aspetti:

1° psico-fisiologico;

2° geometrico.

Soltanto nell'intima collaborazione di essi credo la questione stessa possa avviarsi ad una soluzione: fino ad ora tale collaborazione non solo non si è ottenuta, ma psicologi e matematici non si sono ben compresi reciprocamente. Troppo indeterminati i primi (Berkeley,

James, Mach); più determinati ma troppo categorici ed esclusivisti i secondi. Uno sforzo notevole al riguardo lo troviamo nel Poincaré (1), sforzo che avrebbe avuto più ricchi risultati se il Poïncaré stesso non fosse stato influenzato egli pure dalla convinzione dell'assoluta convenzionalità dell'intuizione spaziale nella geometria euclidea.

Così la dotta esposizione del Poincaré non dice nulla di nuovo al filosofo, non significa nulla, in questo caso, alla critica della dottrina di Kant sulle tre dimensioni della nostra intuizione spaziale, appunto perchè Kant non si stanca mai di ripetere che le sue forme intuizionistiche della conoscenza riguardano soltanto il mondo fenomenico non quello delle cose in sè.

La questione resta pertanto immutata, resta in tutta la sua intensità dubitativa: è l'intuizione spaziale della sensibilità umana a tre dimensioni? Ciò ammesso, è dessa identica a quella della geometria euclidea? Questioni che la metageometria non ha sotto il primo aspetto nemmeno affrontato, mentre sotto il secondo si è limitata ad accennare vagamente ad alcune prerogative (omogeneità, ecc.) che figurano nello spazio geometrico e che non figurano in quello — mi si passi la parola — *reale* (2).

---

(1) *La Valeur de la Science,* Cap. III, IV, nonchè in *Revue de Méth.*, 1903, pag. 281-301 e pag. 407-429.

(2) Cfr. ad esempio la critica alla teoria del De Cyon secondo il quale ciascun organismo avrebbe l'intuizione dello spazio a tante dimensioni quanti sono i canali semi-circolari. In essa si palesa — non espressamente ma non per questo meno chiaramente — la tendenza del Poincaré a considerare tale tesi come essenzialmente paradossale. Anche se la teoria del De Cyon è troppo categorica, nessun filosofo avrebbe a meravigliarsi che, in senso più generico, l'intuizione spaziale variasse nel numero delle sue dimensioni a seconda delle diverse strutture organiche. Ove ciò si potesse dimostrare, porterebbe senza dubbio un colpo rude alla dottrina dall'incondizionato convenzionalismo, mentre lascerebbe immutato il valore dell' « a priori » kantiano. Cfr. questo volume, Cap. IV, § 19, pag. 167 (nota).

Indubbiamente la metageometria è destinata a dire l'ultima parola al riguardo: per questo essa costituisce a mio modo di vedere un indirizzo di capitale importanza per il filosofo; anche in tal campo può manifestarsi l'azione unificatrice della filosofia nei riguardi delle scienze particolari; sarà compito precipuo del filosofo stabilire quella sintesi fra le argomentazioni della psicologia e quella della geometria, che sola potrà avviarci sulla strada della soluzione del problema, fino ad ora esaminato soltanto sotto il punto di vista particolare di questa o di quella scienza.

Nei riguardi di Kant essa rifletterebbe specificatamente, come si è accennato, il significato del suo « a priori ». Fondamento dei principii della geometria verrebbe ad essere in ogni modo non già l'esperienza — e quindi l'empirismo non avrebbe nulla a guadagnarci — ma un « a priori » convenzionale ben diverso da quello kantiano che sarebbe il solo « a priori » possibile per la nostra sensibilità e non soltanto il più comodo: l'innatezza cioè contrapposta alla convenzionalità.

Logistica. — Un più vasto campo d'azione contro la dottrina matematica kantiana ci è offerto dalla logistica: mentre in fondo la metageometria, anche intesa come da alcuni si vuole, non porterebbe che a scalzare l'apriorità della nostra intuizione spaziale, la logistica mira anche a intaccare il punto essenziale del procedimento della conoscenza matematica: l'intuizione.

Gli assertori della logistica sostengono infatti che nella matematica figurano soltanto l'ipotesi e il procedimento logico facendo loro l'espressione del più strenuo collaboratore del Peano, il Pieri, che la matematica pura è un « sistema ipotetico deduttivo ». Crede di poter con sicurezza affermare la logistica che per poter ammettere un procedimento puramente logico nella matematica è necessario non tanto riformare questa quanto riformare la logica tradizionale, che siamo abituati a considerare come qualche cosa di necessariamente sta-

tico, immutabile nelle sue verità, mentre è invece essa pure passibile di modificazioni e di perfezionamenti, come qualunque altra attività del pensiero. Pare impossibile, nota il Couturat, e con lui altri matematici di opposto indirizzo nei riguardi dell'intuizione (es. P. Boutroux), si sia aspettato fino al secolo XIX ad accorgersi della insufficienza logica dei principii logici universalmente ammessi. Ciò constatato la logistica ci fornisce una serie di principii fondamentali da sostituire a quelli della logica formale, i quali ultimi si accentrano intorno al principio di contraddizione, d'identità e del terzo escluso.

Questi principii fondamentali della tradizione logica hanno indubbiamente — ammette la logistica — dei pregi e ciò spiega, se non giustifica, come essi abbiano potuto essere per tanto tempo incondizionati dominatori; inoltre essi rappresentano al più alto grado il vantaggio di essere poco numerosi e di offrire l'illusione di poter essere alla loro volta ridotti, tanto che da alcuni si obbligò il solo principio di contraddizione a portare tutto il peso della logica formale.

Soltanto, per la logistica i principii stessi presentano l'inconveniente fondamentale di non essere... principii. Lo stesso gran principio di contraddizione — notano il Russell e il Couturat — presuppone la definizione della negazione. In questo senso si è resa necessaria la riforma della logica nel secolo XIX e infine l'affermazione della sua espressione più completa nella logistica.

Andrei troppo lontano dal limitatissimo scopo prefissomi esponendo qui i principii della logica-matematica in tal modo intesa, sufficienti di per se stessi a darci tutto l'edificio matematico, senza ricorrere a nessun altro elemento che non sia quello della deduzione delle verità particolari da queste verità generali, e, particolarmente per quanto c'interessa, senza ricorrere all'intuizione.

Senza dubbio è vero quanto i matematici rimproverano alla logica di essersi arenata per secoli in quis-

quilie, distinzioni e suddistinzioni nell'interpretazione di Aristotele, vedendo soltanto nel procedimento logico da lui adottato la forma di ogni sapere che aspirasse effettivamente ad essere scienza in senso rigoroso e non soltanto conoscenza relativa e provvisoria. Mantenuta in questi limiti l'osservazione è perfettamente giusta, ma in questi limiti essa è accettata da qualunque uomo di buon senso. Coloro che trovano perfettamente naturale l'eventuale meraviglia di quelli che sono portati a constatare che soltanto nel secolo XIX ci si sia accorti che qualche cosa si poteva riformare nella logica aristotelico-scolastica, rivelano con questo implicitamente di credere che proprio fino al declinare del 1800 tale logica aristotelico-scolastica sia rimasta sola e incontrastata padrona.

Ma questo non è, e non è precisamente per merito di quell'indagine filosofica che si cercherebbe di paragonare in certo qual modo a dell'acqua stagnante: non è per merito particolare di quel Kant (« Proleg. », § 39) contro il quale principalmente sono rivolte le critiche della logistica. Reputo quindi del tutto arbitrario l'attribuire quasi esclusivamente — e secondo non pochi, esclusivamente — ai matematici l'onore di aver battuto una nuova strada nel procedimento logico — chè qui le strade non possono essere che due, le vecchie due — ma certo si può riconoscere avere essi aggiunto qualche cosa a complemento di tali due antiche strade, l'analitica e la sintetica. Soltanto, queste nuove, recenti modificazioni — e ciò sia detto non soltanto dell'indirizzo logistico, ma di tutta la matematica — non sono così determinanti nei rapporti fra la logica e la matematica come normalmente si crede dai matematici o per lo meno dai matematici logici, intendendo alludere con tale espressione a quella scuola che pretende escludere l'intuizione dal procedimento conoscitivo della matematica. Il pretendere di rivoluzionare la logica equivale al pretendere di cambiare il nostro pensiero che si è creato la logica: esso può andare assumendo nuovi e più com-

plessi atteggiamenti che richiedono un perfezionamento dei suoi elementi formali, ma questi non possono essere sostituiti da altri, i quali, perchè si verifichi vera rivoluzione, non potranno che essere incompatibili con i primi.

Per questo credo non si debba fare altro quando si parla di riforma della logica — in qualunque caso — che tenere presente che la riforma stessa non può significare se non perfezionamento del metodo sintetico o di quello analitico o di entrambi; ma non mai intendere esclusione di uno di tali metodi o aggiunta ad essi di un qualsiasi altro elemento.

Se si accettano questi punti fondamentali credo che malgrado la logistica si debba ammettere oggi come ieri l'intuizione come base essenziale del procedimento matematico. Ho voluto specificare « malgrado la logistica » perchè è soltanto questa corrente che tende ad abbattere completamente senza alcuna speranza di appello la dottrina matematica di Kant: l'intuizione è infatti ancora oggi ammessa come condizione indispensabile per poter proseguire tanto in aritmetica quanto — e più sensibilmente, direi — in geometria, da matematici non certo sospetti di superficialità o di « divagazioni metafisiche » a detrimento — la metafisica ha spalle robuste e può sopportare tutte le accuse — del rigoroso procedimento proprio delle scienze esatte: basterebbe al riguardo citare il Poincaré e Pietro Boutroux.

Specifichiamo bene questo punto: possiamo notare che tutti i matematici hanno qualche cosa da rimproverare a Kant. Innanzi tutto egli ha avuto l'ardire di parlare, e ripetutamente, della matematica senza essere un matematico, e questo non è facilmente perdonato dai tecnici. In secondo luogo Kant non dimostra sempre di avere una conoscenza profonda della materia che tratta: quali possano essere i suoi meriti, è tuttavia necessario ammettere questo. Era forse troppo filosofo per poter essere anche qualche cosa d'altro! Egli non ha, è vero, lasciato in matematica alcuna traccia; non è un Descartes

o un Leibniz, ma anche le sue pretese sono al riguardo quanto mai modeste. Egli si limita in fondo a dirci che:

a) i principii fondamentali della matematica sono « a priori »;

b) i giudizi matematici sono sintetici;

c) la matematica procede per intuizione.

È bene inoltre ricordare che tali modeste pretese non sono da Kant prospettate volendo trattare specificatamente del problema della matematica, ma soltanto indirettamente viene a parlare di essa come avrebbe potuto fare con qualunque altra scienza particolare: certo, essa ha una superiorità sulle altre discipline in quanto si presenta sotto un aspetto rigorosamente organico e le sue proposizioni significano verità e serietà che non possono essere poste in dubbio da alcuno contrariamente di quello che si può constatare nell'indeterminatissima metafisica. Essa non rappresenta cioè nella teoria kantiana del giudizio sintetico « a priori » che un esempio — il più efficace se si vuole — ma pur sempre semplice esempio, come un altro ci vien dato dal problema inerente alla fisica pura.

Ora, mentre i matematici in generale, pure non accettando integralmente questi tre punti essenziali della dottrina matematica kantiana, tuttavia non li respingono in blocco, possiamo invece notare che questo si verifica nei riguardi della logistica.

L'azione più fortemente demolitrice di questa rispetto a Kant verte sul terzo punto fondamentale della dottrina matematica di questi, voglio dire sul procedimento intuizionistico. Per questo fu da me trattato per primo e per questo possiamo qui concludere che malgrado le argomentazioni portate dalla logistica medesima, l'intuizione nel processo matematico si mantiene in tutta la sua importanza proprio per quelle stesse ragioni accampate da Kant. Il vecchio esempio della « Critica » per il quale se un filosofo si mette ad esaminare il concetto di triangolo, pure avendo lo stesso filosofo già chiaramente fissato il concetto di punto, di linea, di

spazio, ecc., non potrà mai venire a capo di nulla basandosi su tali concetti e da essi argomentando esclusivamente per via rigidamente logica (analisi e sintesi), rimane in tutta la sua efficacia: « egli potrà riflettere fin che vuole su questo concetto (del triangolo) non ne tirerà fuori niente di nuovo ».

Di conseguenza rimane pure in tutta la sua efficacia detto esempio esteso al differente contegno che di fronte al concetto di triangolo assumerà il geometra: questi comincerà innanzi tutto a « costruire » un triangolo, e questo sarà il primo punto differenziale (le matematiche agiscono sempre su « costruzioni di concetti » e non su concetti). « Proleg. », § 20.

Inoltre, sapendo che due angoli retti presi insieme equivalgono... ecc., prolungherà « un lato del suo triangolo, ottenendo così due angoli contigui che sono uguali a due angoli retti » e così di seguito. Egli arriverà così alla conclusione per una serie di ragionamenti, ma « sempre sorretto dalla intuizione ».

Soltanto per questa differenza di procedimento, puramente logico nel primo caso, logico-intuizionistico nel secondo, si potrà arrivare a determinare che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti.

Io domando questo soltanto: è vero che si può notare questa differenza di procedimento? Ciò ammesso, è vero che nel procedimento del geometra figura un elemento in più che in quello del filosofo? Ciò ammesso, che cosa è questo elemento in più? Non è forse desso l'intuizione, o se non volete chiamarlo intuizione, chiamatelo pure come volete purchè non si voglia far rientrare questo elemento in più, ossia questa nuova attività del pensiero che si aggiunge all'altra puramente logica del filosofo e che per questo suo aggiungersi la deforma nella sua purezza, purchè non si voglia far rientrare anche questo nuovo elemento — dicevo — nel campo della logica in senso stretto. È soltanto in virtù di questo in più deformatore che la scienza può proseguire; la logica perfeziona una scienza, ma non vi aggiunge nulla di

nuovo; la sua azione si limita ad essere puramente formale, esempio tipico il sillogismo.

Lo stesso possiamo osservare nei riguardi del carattere sintetico del giudizio matematico, con la constatazione però che le critiche alla dottrina di Kant hanno qui un'estensione maggiore in quanto sono condivise da non pochi matematici che pure ammettono l'intuizione. Innanzi tutto, adottando la terminologia kantiana possiamo osservare nei riguardi della logistica che poichè il giudizio matematico è basato su altri principii e non soltanto su quello di contraddizione, perciò stesso il giudizio matematico non può essere che sintetico. È vero, la terminologia di Kant è in merito alquanto infelice; ma ciò avrebbe importanza se egli avesse voluto darci un dizionario filosofico o porre comunque le basi di quel linguaggio internazionale psichico-logico da adottarsi universalmente in tutte le relazioni fra gli uomini e segnatamente negli scambi di vedute fra gli studiosi dei diversi paesi per meglio comprendersi, o, per lo meno, per non fraintendersi; ma questo non può avere invece che ben relativa importanza nell'opera kantiana in quanto egli si limita onestamente a dirci: per giudizio analitico intendo questo, e per giudizio sintetico quest'altro (1). In ogni modo la non felice scelta della terminologia kantiana — e non soltanto in questo caso — è stata già rilevata da tempo e da molti filosofi:

(1) Sono quindi perfettamente del parere del Couturat (*La philosophie des Math. de K.* in *Revue de Méth.*, 1904, pag. 347), che « la distinction des jugements analytiques et synthétiques était singulièrement vague et flottante dans l'esprit même de son auteur », ma credo pure che questo non ha importanza per togliere valore all'affermazione che i giudizii matematici sono sintetici, ma tutto al più che gli esempii da Kant portati come analitici sono essi pure sintetici: Es. $(a+b)>a$. (Cfr. questo volume, Cap. III, § 13).

tanto per citarne uno da Ausonio Franchi in « La teorica del giudizio ». Come è stato pure notato d'altronde, in tesi ancor più generale, che ogni giudizio non può in fondo essere altro che sintetico (Martinetti). E anche questo fu rilevato da filosofi nel senso più rigido della parola senza che si fosse sentito il bisogno di ricorrere ai lumi delle scienze particolari.

Ma, indipendentemente da ogni considerazione sul significato di « analitico » e di « sintetico » possiamo anche qui osservare che rimane come nel caso precedente che il famoso esempio kantiano esprime benissimo la sintesi insita nel giudizio matematico. Se noi abbiamo $7+5$ non possiamo che per un'operazione sintetizzatrice del nostro pensiero determinare il numero 12. La ragione del carattere sintetico del 12 in questo caso non dobbiamo ricercarla con argomentazioni rigorosamente scientifiche, ma unicamente pensando che un individuo immaginario qualsiasi che nulla sa di aritmetica, che non è nemmeno del nostro mondo, ove si trovi di fronte a due categorie di oggetti (7 della prima e 5 della seconda) non gli viene fatto certo di pensare a un numero solo che unisca i singoli componenti delle due categorie: nello stesso modo se noi parliamo a un altro individuo della stessa specie degli elementi che compongono un oggetto qualsiasi, ad es., una sedia, esso potrà sommare gambe, sedile e spalliera fin che vuole, non gli riuscirà mai di ricavarne la sedia se non ricorrendo a qualche cosa che non fa parte degli elementi medesimi e che ne costituisce precisamente la loro sintesi.

***

Considerazioni generali. — Aspetto più generico viene ad assumere il problema dell'« a priori ». Nei tre punti da me posti come base essenziale della dottrina matematica di Kant si nota cioè, nell'ordine, una sempre maggiore estensione della critica: pochi matematici (la

logistica) non ammettono l'intuizione per poter proseguire nella matematica; molti non ammettono il carattere esclusivamente sintetico dei suoi giudizii; tutti non ammettono l'« a priori » dei suoi principii come Kant l'intende, ossia un « a priori » che significa in altre parale innatezza e inconcepibilità del contrario (bene inteso sempre ricordando che l'inconcepibilità stessa non è considerata da Kant che condizionatamente alla nostra sensibilità). Si è già accennato a questo « a priori » nei riguardi della terza dimensione dello spazio alludendo alla polemica intorno al V postulato di Euclide e alla scienza metageometrica derivatane.

Qui non posso fare altro che completare le considerazioni medesime estendendole a tutto il complesso dell'« a priori » matematico e non già limitandolo soltanto alla terza dimensione dello spazio. Non credo cioè si possa qui dare, con tutta la buona volontà possibile, incondizionatamente ragione a Kant. Se al nostro pensiero ripugna di ammettere che i principii fondamentali della matematica (definizioni, assiomi e postulati) non siano altro che frutto di puri e semplici artifici convenzionali, intervenuti quasi per tacito accordo fra i matematici — cosa che, di qualunque abilità dialettica ed erudizione si possa fare sfoggio, non potrebbe portare che alla negazione della matematica stessa, che non verrebbe ad essere altro che un'immensa illusione — ciò non pertanto non si può ammettere che tutti questi principii fondamentali siano in noi talmente radicati da poter essere considerati evidentissimi anche per chi non è addentro nelle cose di tale scienza. In altre parole mentre se noi diciamo che A è uguale ad A stabiliamo un principio che non può assolutamente non essere considerato evidente da tutti, non credo si debba ammettere senz'altro come verità di cui debba considerarsi inconcepibile il contrario, viceversa proposizioni come quella che una retta può prolungarsi all'infinito (come sostiene Kant, « Proleg. », § 12, alludendo evidentemente, sia pure in modo incompleto, al II postulato di Euclide),

nè il postulato delle parallele, nè, tanto per brevemente intenderci, i postulati propriamente detti, intendendo con ciò distinguerli, come d'altronde aveva intuito Euclide, dagli assiomi.

L'« a priori » kantiano difetta di un tale criterio differenziale e la ragione di tale mancanza credo proprio debba ricercarsi nell'insufficienza della sua coltura tecnica dirò, della matematica. Ciò non ne infirma cioè la dottrina considerata nel suo complesso: si può rimproverare a lui l'esclusione dei principii fondamentali « a priori » della matematica, ad es. che il tutto è maggiore della sua parte, che è proprio il IV assioma di Euclide; ma anche questo è un particolare. Kant vide erroneamente in tale giudizio un carattere puramente analitico e gli sembrò che ciò potesse infirmare la sua teoria del giudizio sintetico della matematica, mentre nel giudizio stesso possiamo sì ammettere una comparazione, ma non saprei proprio come vederci un'analisi, mentre non sarebbe affatto difficile stabilirne il carattere sintetico proprio con le stesse argomentazioni dell'esempio del $7 + 5 = 12$. Più ancora, Kant si preoccupò forse troppo d'indicare come principii « a priori » della matematica, principii particolari ad essa esclusivamente suoi proprii, ciò che lo portò a rifuggire da quei principii generalissimi che invece proprio soltanto essi sono « a priori » in quanto nozioni comuni a tutti gli uomini e dei quali effettivamente non possiamo concepire il contrario.

Ma, ripeto, questi sono particolari tecnici che non intaccano il gran valore del complesso della dottrina dell'« a priori » mirante a dirci che anche in quelle scienze particolari che noi siamo abituati a considerare come le più sicure, figura un elemento che è insito nella nostra stessa coscienza, e che anzi è soltanto in virtù di questo elemento che noi possiamo conoscere, che noi possiamo raggiungere quel sapere, non destinato a mutare ad ogni soffiar di vento, come sarebbe invece se soltanto dal mondo esterno noi dovessimo ricavare le nostre nozioni.

*
* *

Mi sono forse dilungato un po' troppo, e non voglio abusare oltre della pazienza cortese del Congresso. Una sola osservazione per quanto riguarda i rapporti fra Kant e i matematici considerati nel loro complesso senza alcuna distinzione di scuola o d'altro. Nello studio delle matematiche che ho ripreso da qualche anno, perchè ne ho veduta l'indispensabilità per il filosofo, ho trovato un punto sul quale tutti i matematici si trovano d'accordo: è nel parlare con eccessiva disinvoltura di Kant. Scusatemi l'espressione, ma non ho saputo trovarne altra più corretta; forse, la profonda venerazione per il grande maestro mi ha presa la mano; ma confesso che alcune volte non ho potuto fare a meno di restare stupefatto di fronte a giudizii affrettati che non fanno altro, molto spesso, che porre nettamente in luce che esistono divarii molto più sensibili fra questo e quel matematico, che fra i matematici e Kant. Il Poincaré è più vicino a Kant che al Vailati: il Boutroux è più vicino a Kant che al Couturat e al Russel. Sembrerà questo eccessivo semplicismo, ma appunto per consolidare alquanto la mia coltura tecnica della matematica — troppo recente per poter essere molto robusta — mi limito a chiudere con una domanda: perchè questa gara fra i più belli ingegni matematici di tutti i paesi da Gauss ai giorni nostri, ad assumere posizione d'attacco contro la filosofia kantiana, proprio contro quella filosofia cioè che ha portato a un così alto grado di nobiltà la vostra disciplina?

INDICE DEI NOMI

INDICE - SOMMARIO

Capitolo I.

Preliminari metafisici.

Capitolo IV.

La questione precedente trattata specificatamente nei riguardi della geometria.

APPENDICE.

La dottrina matematica di Kant nell'interpretazione di matematici moderni.

che perfezionamento del metodo analitico o del metodo sintetico o di entrambi. — Nessun'altra riforma della logica è possibile.

La necessità dell'intuizione nel procedimento matematico, necessità negata dalla logistica. — Questo è il punto in cui la logistica si mostra come l'indirizzo più categorico nel respingere la concezione che Kant ebbe della matematica. Accentrando infatti la dottrina kantiana in questi tre punti essenziali:

a) i principii fondamentali della matematica sono « a priori »;

b) i giudizii matematici sono sintetici;

c) la matematica procede per intuizione;

possiamo notare che soltanto la logistica li respinge tutti e tre.

Generalmente infatti l'intuizione è ammessa come necessità di procedimento della grande maggioranza dei matematici per quanto ha attinenza alla loro disciplina. — Il diverso procedimento del filosofo e del matematico dinanzi a un problema matematico. — L'intuizione resta in tutta la sua efficacia.

Alla stessa conclusione possiamo arrivare nei riguardi dell'altro punto fondamentale della dottrina matematica di Kant: il giudizio matematico è cioè un giudizio sintetico. — La terminologia di Kant non è sempre felice al riguardo.

Aspetto più generico viene ad assumere il problema intorno al terzo punto fondamentale: il problema cioè dell'« a priori ». — Mentre l'intuizione nel procedimento matematico è giustamente ammessa da quasi tutti i matematici, il carattere sintetico dei suoi giudizii è ammesso da ben pochi matematici e infine da nessun matematico moderno è ammesso l'« a priori » dei principii fondamentali come Kant l'intende. Già si è veduto nell'accenno fatto alla metageometria a proposito della terza dimensione dello spazio come la soluzione di essa non può essere data che dalla sintesi metafisica della collaborazione di matematici e psicologi. — Qui il problema medesimo non è più limitato però alle dimensioni dello spazio ma si estende anche ai prin-